ARITMÉTICA

18/12/24 - AULA 07

RELAÇÃO DE ORDEM EM $\mathbb{Z}$.

Def.: Dados $a, b \in \mathbb{Z}$, dizemos que a é menor ou igual a b, e escrevemos $a \leq b$ se, e somente se, $\exists\, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $a + m = b$.

Dizemos que a é estritamente menor do que b, e escrevemos $a < b$ se, e só se, $\exists\, m \in \mathbb{N}$ tal que $a + m = b$.

Neste caso, dizemos que $m = b - a$ é positivo, e escrevemos $b - a > 0$.

PROPOSIÇÃO: Dados $a, b, c \in \mathbb{Z}$, valem as seguintes propriedades:

P_1: $a \leq a$ (REFLEXIVIDADE)

P_2: $a \leq b$ e $b \leq a \Rightarrow a = b$ (ANTI-SIMETRIA)

P_3: $a \leq b$ e $b \leq c \Rightarrow a \leq c$ (TRANSITIVIDADE)

P_4: vale exatamente uma das sentenças, $\forall a, b \in \mathbb{Z}$:

$a < b$ ou $a = b$ ou $a > b$

(PROPRIEDADE DA TRICOTOMIA)

DEMONSTR.: Provaremos somente P_2 e P_3.

P_2: Suponha que $a \leq b$ e $b \leq a$.

Como $a \leq b$, segue que $\exists\, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que

$$a + m = b \quad (*)$$

Como $b \leq a$, segue que $\exists\, t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que

$$b + t = a \quad (**)$$

Combinando $(*)$ e $(**)$, vem:

$$\underbrace{b}_{a+m} + t = a$$

$$\Longrightarrow (a+m) + t = a$$

Pela associatividade, vem:

$$a + (m+t) = a.$$

Pela lei do cancelamento,

$$\cancel{a} + (m+t) = \cancel{a} \Rightarrow m + t = 0,$$

e como $m, t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, a igualdade $m + t = 0$ só terá sentido se $m = t = 0$.

Disso, de $(*)$ ou de $(**)$ concluímos que

$$a = b,$$

o que prova P_2.

Provemos $\underline{P_3}$: $a \leq b$ e $b \leq c \Rightarrow a \leq c$

Suponha $a \leq b$ e $b \leq c$.

Como $a \leq b$, então $\exists\, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que

$$a + m = b \qquad (\mathrm{I}).$$

Como $b \leq c$, então $\exists\, t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que

$$b + t = c \qquad (\mathrm{II})$$

Combinando (I) e (II), vem:

$$\underbrace{b}_{\substack{\shortparallel \\ a+m}} + t = c$$

$$\Longrightarrow (a+m) + t = c$$; o que, por associatividade, vem:

$$a + (m+t) = c$$, com $m + t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,

ou seja, mostramos que $a \leq c$.

$\square$

PROPOSIÇÃO: Dados, $a, b \in \mathbb{Z}$. Então,

$$a \leq b \Rightarrow a+c \leq b+c, \ \forall c \in \mathbb{Z}.$$

DEMONSTR.: Suponha $a \leq b$.

Então, $\exists m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $a+m=b$.

Somando c à igualdade, vem:

$$(a+m)+c = b+c.$$

Por associatividade,

$$a+(m+c) = b+c.$$

Por comutatividade,

$$a+(c+m) = b+c.$$

Por associatividade de novo:

$$(a+c)+m = b+c, \quad m \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

ou seja, concluímos que $a+c \leq b+c$.

$\square$

Uma importante consequência do resultado acima é o seguinte corolário:

COROLÁRIO: Seja $a \in \mathbb{Z}$. Então,

$$a \leq 0 \Rightarrow -a \geq 0.$$

DEMONSTR.: Suponha que $a \leq 0$. Pela proposição anterior, somando "$-a$" a esta desigualdade, vem:

$$\underbrace{-a+a}_{=0} \leq -a+0 \implies 0 \leq -a;$$

ou seja, segue que $-a \geq 0$; como queríamos mostrar. $\square$

CONJUNTOS LIMITADOS

Def.: Seja $A \subset \mathbb{Z}$ um conjunto não-vazio. Dizemos que o conj. A é limitado inferiormente se, e só se, $\exists\, k \in \mathbb{Z}$ tal que $k \leq a$, $\forall a \in A$.

Neste caso, dizemos que $k \in \mathbb{Z}$ é uma cota inferior para o conjunto A.

Def.: Seja $A \subset \mathbb{Z}$ um conjunto limitado inferiormente. Dizemos que $a_0 \in A$ é o elemento mínimo do conjunto A se, e só se,

$$a_0 \leq a, \ \forall a \in A.$$

PROP.: Se um conjunto $A \subset \mathbb{Z}$ possui elemento mínimo, ele é único.

DEMONSTR.: Sejam a_0 e b_0 dois elementos mínimos de um conjunto A, limitado inferiormente.

Então, $\forall a \in A$, tem-se $a_0 \leq a$ e $b_0 \leq a$.

Em particular, $a_0 \leq b_0$ e $b_0 \leq a_0$.

Então, pela propriedade antissimétrica segue que $a_0 = b_0$, ou seja, o elemento mínimo de um conjunto, existindo, é único.

$\square$

Obs.: De forma similar podem-se definir conjunto limitado superiormente e elemento máximo de um conjunto, se existir.

No que segue apresentaremos um axioma fundamental: o princípio da boa ordenação.

AXIOMA (PRINCÍPIO DA BOA ORDEM) Todo conjunto não vazio dos inteiros não-negativos possui elemento mínimo.

Este axioma é vital para muitos resultados que estudaremos, dentre os quais o seguinte:

PROP.: Não existe número natural entre 0 e 1.

DEMONSTR.: Por absurdo, suponha que exista número natural entre 0 e 1. Disso, defina o conjunto

$$S = \{ n \in \mathbb{N} : \quad 0 < n < 1 \}.$$

Pela hipótese do absurdo temos que $S \neq \emptyset$.
Além disso, temos que todo elemento de S é positivo, pois $n > 0$.
Então S é um subconj. dos inteiros não-negativos. Assim, estamos nas hipóteses do axioma do Princípio da boa ordem.
Pelo princípio da boa ordem, segue que

$$\exists\, m = \min S \; , \quad m \in S.$$

Como $m \in S$ segue que $0 < m < 1$.

Logo, $m > 0$ e $m < 1$.

multiplicando $n < 1$ por $n > 0$, obtemos

$$n^2 < n \,.$$

Além disso, $n^2 > 0$ e $\left.\begin{matrix} \\ n^2 < n < 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 0 < n^2 < 1$

Logo, $n^2 \in S$; mas $n^2 < n = \min S$; ou seja, obtemos um elemento de S que é menor do que o mínimo de S, um absurdo!

Portanto, $\nexists\, n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < n < 1$. $\square$

PROPOSIÇÃO: (PROPRIEDADE ARQUIMEDIANA) Sejam a, b inteiros positivos. (em $\mathbb{N}$). Então, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 . a > b$.

DEMONSTR.: Por absurdo, suponha que seja falso, ou seja, suponha que, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, tem-se $n.a \leq b$.

Defina o conjunto

$$S = \{\, b - na \;:\; n \in \mathbb{Z},\ n > 0 \,\}$$

Por construção $S \subset \mathbb{N} \cup \{0\}$. (pois $na \leq b$
$\Downarrow$
$b - na \geq 0$)

Pelo princípio da boa ordem segue que $\exists\, m \in S$, tal que $m = \min S$.

Então, deveremos ter, por construção de S, que

$$m = b - k.a \quad , \text{para algum } k \in \mathbb{Z},\ k > 0.$$

Seja $\quad l = b - (k+1).a \quad , \quad l \in S.$

Então,

$$l = b - (k+1).a = \underbrace{b - ka}_{=m} - a = m - a < m,$$

ou seja, $l \in S$ é tal que

$$l < m = \min S, \quad \text{um absurdo!}$$

Portanto, $\forall\, a, b \in \mathbb{N}$, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n_0 . a > b.$$

$\square$

O próximo resultado é uma extensão do princípio da boa ordem.

<u>PROPOSIÇÃO</u>: Todo conjunto não-vazio de inteiros, limitado inferiormente, possui elemento mínimo.

DEMONSTR.: Seja $A \subset \mathbb{Z}$ um conjunto não-vazio, que seja limitado inferiormente.

Logo, $\exists\, k \in \mathbb{Z}$ tal que $k \leq a$, $\forall a \in A$.

Defina o conjunto

$$S = \{ a - k : a \in A \}.$$

Então, $S \neq \emptyset$ pois $A \neq \emptyset$.

Como $k \leq a$, $\forall a \in A$, os elementos de S são não-negativos.

Então, pelo princípio da boa ordem, segue que $\exists\, m = \min S$, dado por

$$m = a_0 - k, \text{ para algum } a_0 \in A.$$

Vamos mostrar que $a_0 = \min A$. [o que concluirá a prova da proposição]

Temos $a_0 \in A$. Por absurdo, se $\exists\, \tilde{a} \in A$ tal que $a_0 > \tilde{a}$ (ou seja, se por absurdo a_0 não for o mínimo de A).

Somando "$-k$", obtemos: $a_0 - k > \tilde{a} - k$, i.e.,

$$\underbrace{\tilde{a} - k}_{\in S} < a_0 - k = \min S$$

Ou seja, $\tilde{a} - k < \min S$ e $\tilde{a} - k \in S$, um absurdo! Portanto, $a_0 = \min A$. $\square$