ARITMÉTICA

11/12/24 - AULA 06

O CONJUNTO $\mathbb{Z}$ DOS NÚMEROS INTEIROS:

Até o presente momento estudamos o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais via axiomas de Peano.

Naquela seção, vimos que, por exemplo, não apresentamos o zero (para nosso curso, o zero não é número natural: isso por razões meramente históricas, quando pensamos em contagem)

Em $\mathbb{N}$ introduzimos as operações de adição $+$ e multiplicação $\cdot$. Pode-se, também, definir a diferença $-: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, fazendo:

$$a - b \quad , \text{ se } \quad a > b .$$

Porém, se $a < b$ (ou mesmo $a = b$), a diferença entre a e b passa a não ter sentido em $\mathbb{N}$, pois como, por exemplo (pensando apenas em $\mathbb{N}$), retirar 5 de 3 ?

Para responder a isso, precisou-se definir a noção de débito e associá-los a NÚMEROS NEGATIVOS.

Por essa razão, precisou-se introduzir um conjunto mais amplo (num certo sentido) que o conj. $\mathbb{N}$ dos números naturais.

A este conjunto, dá-se o nome de CONJUNTO DOS NÚMEROS INTEIROS $\mathbb{Z}$ (o $\mathbb{Z}$ vem do alemão, para a expressão "número inteiro").

No conjunto $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ dos números inteiros definimos as operações

$$+ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$$
$$(a, b) \longmapsto a+b \quad , \text{ e}$$

$$\cdot : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$$
$$(a, b) \longmapsto a \cdot b \quad ,$$

que satisfazem aos seguintes axiomas: Dados $a, b, c \in \mathbb{Z}$, então:

A1) $a + (b+c) = (a+b)+c$ (associatividade)

A2) $\exists\, 0 \in \mathbb{Z}$ tal que $a + 0 = a$, $\forall a \in \mathbb{Z}$.
(existência do neutro aditivo)

A3) $\forall\, a \in \mathbb{Z}$, $\exists\, -a \in \mathbb{Z}$ tal que

$$a + (-a) = 0 .$$

$-a$ é o <u>oposto</u> de a ou o seu

simétrico aditivo

A4) $a+b = b+a$ (comutatividade da adição)

M1) $a\cdot(b\cdot c) = (a\cdot b)\cdot c$ (associatividade)

M2) $1\cdot a = a$, $\forall a \in \mathbb{Z}$
(1 é o neutro multiplicativo)

M3) se $a\cdot b = a\cdot c$, com $a \neq 0$, então $b = c$.
(lei do corte para o produto)

M4) $a\cdot b = b\cdot a$ (comutatividade do produto)

D) $a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$
(distributividade)

PROPOSIÇÃO: Os neutros aditivo e multiplicativo são únicos.

DEMONSTRAÇÃO: Mostremos primeiramente a unicidade do neutro aditivo.
Sejam 0 e θ neutros aditivos.

Mostraremos que $0 = \theta$.

De fato;

$$0 = 0 + \theta = \theta \implies 0 = \theta.$$

pois θ é neutro aditivo

pois 0 é neutro aditivo.

Supondo agora que 1 e $1'$ sejam neutros multiplicativos, exatamente do mesmo modo se mostra que $1 = 1'$:

$$1 = 1 \cdot 1' = 1' \implies 1 = 1'.$$

pois $1'$ é neutro multipl.

pois 1 é neutro multipl.

$\square$

Observando o axioma A_3, temos que, cada número inteiro possuirá um simétrico aditivo. Precisamos mostrar a unicidade do simétrico aditivo de cada $a \in \mathbb{Z}$. Ou seja, temos que provar o seguinte resultado:

<u>PROPOSIÇÃO:</u> O simétrico aditivo de cada $a \in \mathbb{Z}$ é único.

DEMONSTRAÇÃO: Dado $a \in \mathbb{Z}$ um número inteiro qualquer. Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ dois simétricos aditivos para $a \in \mathbb{Z}$.

Vamos mostrar que $\alpha = \beta$. De fato, como α e β são simétricos aditivos para $a \in \mathbb{Z}$, segue que:

$$\alpha + a \overset{\text{COMUTAT.}}{=} a + \alpha = 0 \quad (*) \qquad e \qquad \beta + a \overset{\text{COMUTAT.}}{=} a + \beta = 0 \quad (**)$$

Disso, temos:

$$\alpha \overset{\text{pois 0 é neutro aditivo}}{=} \alpha + 0 \overset{\text{por } (**)}{=} \alpha + (a + \beta) \overset{\text{ASSOCIATIVIDADE DA ADIÇÃO}}{=} (\alpha + a) + \beta \overset{\text{por } (*)}{=}$$

$$0 + \beta \overset{\text{pois 0 é neutro aditivo}}{=} \beta \implies \boxed{\alpha = \beta}$$

$\square$

PROPOSIÇÃO: (LEI DO CANCELAMENTO DA ADIÇÃO) Dados $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Vale a propriedade:

$$a+b = a+c \implies b = c.$$

DEMONSTRAÇÃO: Dados $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Suponha que

$$a+b = a+c. \qquad (*)$$

Vamos mostrar que $b = c$.

Somando $-a$ em ambos os membros da igualdade em $(*)$, vamos obter

$$(-a)+(a+b) = (-a)+(a+c).$$

Por associatividade,

$$\underbrace{(-a+a)}_{=0} + b = \underbrace{(-a+a)}_{=0} + c$$

$$\implies 0 + b = 0 + c \implies \boxed{b = c.}$$

$\square$

PROPOSIÇÃO: $a \cdot 0 = 0, \quad \forall a \in \mathbb{Z}.$

DEMONSTRAÇÃO:

$$a \cdot 0 \overset{\text{pois } 0 \text{ é neutro aditivo}}{=} a \cdot (0+0) \overset{\text{distributividade}}{=} a \cdot 0 + a \cdot 0$$

Ou seja, obtemos:

$$a \cdot 0 = a \cdot 0 + a \cdot 0$$

$$\Rightarrow a \cdot 0 + \underbrace{0}_{\text{neutro aditivo}} = a \cdot 0 + a \cdot 0$$

Pela lei do cancelamento da adição (prop. anterior), segue que:

$$\cancel{a \cdot 0} + 0 = \cancel{a \cdot 0} + a \cdot 0 \Rightarrow 0 = a \cdot 0$$

$\square$

PROPOSIÇÃO: Dados $a, b \in \mathbb{Z}$. Se $a \cdot b = 0$, então $a = 0$ ou $b = 0$.

DEMONSTRAÇÃO: Suponha que

$$a \cdot b = 0.$$

Pela proposição anterior segue que $0 = a \cdot 0$

Então

$$a \cdot b = a \cdot 0$$

Se $a = 0$, o resultado segue.

Se $a \neq 0$, então pela lei do corte para o produto (axioma M3), segue que $b = 0$.

$\square$

PROPOSIÇÃO: Dados $a, b \in \mathbb{Z}$, tem-se que:

(i) $-(-a) = a$. (O SIMÉTRICO DO SIMÉTRICO DE UM NÚMERO É O PRÓPRIO NÚMERO)

(ii) $(-a) \cdot b = -(a b) = a \cdot (-b)$

(iii) $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$.

DEMONSTRAÇÃO: Note que, c.f. o axioma (A3), podemos escrever:

$$-(-a)+(-a)=0$$

Somando a na igualdade acima, vem:

$$\big(-(-a)+(-a)\big)+a=0+a=a$$

pois 0 é neutro aditivo.

Pela associatividade, vem:

$$-(-a)+[\underbrace{(-a)+a}_{=0}]=a.$$

$$\Longrightarrow -(-a)+0=a \quad , \text{ i.e.,}$$

$$\boxed{-(-a)=a.}$$, o que prova (i).

(ii) Mostremos que $(-a).b=-(ab)=a.(-b)$

Provaremos apenas a primeira igualdade, tendo em vista que a segunda é similar.

Note que

$$(-a).b+ab \underset{\uparrow}{=} (-a+a)\,b=0.b=0$$

DISTRIBUTIV. + COMUTAT.

Ou seja, segue que

$$(-a).b + ab = 0$$

Somando $-(ab)$, vem:

$$\big((-a)b + ab\big) + (-ab) = 0 - (ab)$$

Pela associatividade,

$$(-a).b + (\underbrace{ab - ab}_{=0}) = -(ab)$$

$$\Rightarrow (-a).b + 0 = -(ab)$$

$$\Rightarrow (-a)b = -(ab),$$ o que prova (ii)

(iii) $(-a).(-b) = a.b$:

Por (ii), podemos escrever:

$$(-a).(-b) \underset{\text{ii}}{=} -(a.(-b)) \underset{\text{ii}}{=} -(-(ab)) \underset{\text{por (i)}}{=} a.b$$

□