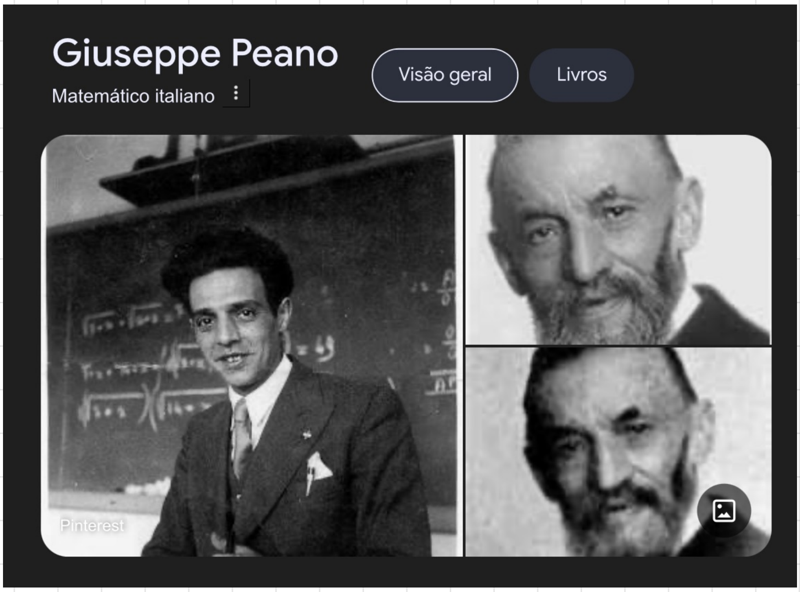
ARITMÉTICA

04/12/24 – AULA 04

OS NÚMEROS NATURAIS A PARTIR DOS AXIOMAS DE PEANO:

Para estruturar uma teoria matemática, deve-se partir de alguns conceitos (como entes primitivos, definições e axiomas válidos sem demonstração), e, depois, a partir deles, apresentar proposições e teoremas, os quais usam os conceitos anteriores e a lógica matemática para provar sua validade.

Giuseppe Peano (1858 – 1932) foi um matemático que, desenvolveu 5 axiomas, chamados de AXIOMAS DE PEANO, para estruturar o estudo do conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais.



– IMAGEM DO WIKIMEDIA COMMONS.

Para tal, ele introduziu o conceito de sucessor de um número.

AXIOMAS DE PEANO:

P1: 1 é um número natural.

P2: Se a é um número natural, então o seu sucessor é único e também é um número natural.

P3: 1 não é sucessor de nenhum número natural.

P4: se dois números naturais possuem o mesmo sucessor, então estes dois números são iguais.

P5: Se S é uma coleção de números naturais tal que contém o 1 e tal que todo elemento de S também contém o seu sucessor em S, então a coleção S é todo o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais.

Denotando o sucessor de $a \in \mathbb{N}$ por a^+, os axiomas de PEANO podem ser reescritos por:

P_1: $1 \in \mathbb{N}$;

P_2: $a \in \mathbb{N} \Rightarrow a^+ \in \mathbb{N}$. (e é único)

P_3: $\forall a : a \in \mathbb{N} \Rightarrow a^+ \neq 1$.

P_4: $a^+ = b^+ \Rightarrow a = b$.

P_5: $S \subset \mathbb{N}$ tal que:

$$(i)\ 1 \in S\ ;$$

$$(ii)\ a \in S \Rightarrow a^+ \in S.$$

Então $S = \mathbb{N}$

Obs: 01) O axioma P_5 é o princípio da indução matemática (rudimentar)

02) Obviamente, o conj. $\mathbb{N}$ dos números naturais, via axiomas de Peano, é definido por:

$$\mathbb{N} = \{1, 1^+, (1^+)^+, ((1^+)^+)^+, \dots\}$$

PROPOSIÇÃO: $\forall\, a \in \mathbb{N},\quad a^+ \neq a.$

Em palavras: nenhum número natural pode ser o sucessor de si mesmo.

DEMONSTR.: Usaremos o axioma P_5 do seguinte modo: seja $S \subset \mathbb{N}$ o conjunto

$$S = \{a \in \mathbb{N} : a^+ \neq a\}.$$

Para provar a proposição basta mostrar que $S = \mathbb{N}$.

Para isto, temos que mostrar que:

(i) $1 \in S$;

(ii) $a \in S \Rightarrow a^+ \in S$.

(i) Note que, de P_3 temos que, $\forall a \in \mathbb{N}$, $a^+ \neq 1$

Em particular, como $1 \in \mathbb{N}$, devido a P_1;

tem-se que $1^+ \neq 1$.

Logo, conclui-se que $1 \in S$.

Além disso, concluímos que $S \neq \emptyset$, ou seja, está bem definido.

(ii) Dado $a \in S$, vamos mostrar que $a^+ \in S$.

Como $a \in S$, o mesmo deve obedecer a regra que determina que o mesmo esteja em S, ou seja,

$$a^+ \neq a.$$

De P_4, que diz que: $\alpha^+ = \beta^+ \Rightarrow \alpha = \beta$, por transposição teríamos: $\alpha \neq \beta \Rightarrow \alpha^+ \neq \beta^+$

$(P \Rightarrow Q \Leftrightarrow \sim Q \Rightarrow \sim P)$

Então, sendo $a^+ \neq a$, segue (por transposição de P_4) que $(a^+)^+ \neq a^+$; o que nos diz que

$a^+ \in S$.

Ou seja, dado $a \in S$, mostramos que o seu sucessor $a^+ \in S$, provando (ii).

De (i) e (ii) segue de P_5 que $S = \mathbb{N}$, ou seja, mostramos que $a^+ \neq a$, $\forall a \in \mathbb{N}$ $\square$

PROPOSIÇÃO: (PRINCÍPIO DA INDUÇÃO MATEMÁTICA, 1ª FORMA)

Seja $P(n)$ uma afirmação sobre $n \in \mathbb{N}$. Se:

(i) $P(1)$ for verdadeira;

(ii) $P(k)$ for verdadeira para um certo $k \in \mathbb{N}$, implicar em $P(k^+)$ ser verdadeira;

Então, $P(n)$ é verdadeira, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Obs: o item (i) chama-se BASE DA INDUÇÃO.

No item (ii),

$$\underbrace{P(k) \text{ verdadeira}}_{\text{HIPÓTESE DA INDUÇÃO}} \Rightarrow \underbrace{P(k^+) \text{ verdadeira}}_{\text{TESE DA INDUÇÃO.}}$$

DEMONSTRAÇÃO: Basta observar o axioma P_5:

Seja $S = \{ n : P(n)$ é verdadeira$\}$.
Basta mostrar que $S = \mathbb{N}$.

Pelo item (i) temos que $P(1)$ é verdadeira
Logo, $\boxed{1 \in \mathbb{N}.}$ $(*)$

Pelo item (ii), na hipótese da indução, temos que supondo que $P(k)$ seja verdadeira, ou seja, supondo $k \in S$; segue que $P(k^+)$ também é verdadeira, ou seja, $k^+ \in S$;

concluindo que: $\boxed{k \in S \Rightarrow k^+ \in S}$ $(**)$

De $(*)$ e $(**)$, usando P_5, concluímos que $S = \mathbb{N}$; o que mostra que $P(n)$ é verdadeira $\forall n \in \mathbb{N}$.

$\square$

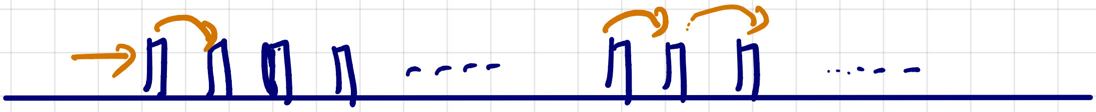
Obs: IDEIA DO PRINCÍPIO DA INDUÇÃO MATEMÁTICA:

Este princípio é usado quando precisamos mostrar/provar alguma propriedade que deva valer $\forall n \in \mathbb{N}$ (ou um subconj. infinito de $\mathbb{N}$). Como não é possível ir "TESTANDO" para cada n, devemos usar a indução: ou seja, testar para o primeiro valor (o $n=1$, por exemplo), e depois, mostrar que, valendo para um certo n, valerá para o seu sucessor.

Um esquema para visualizar a ideia da indução é considerar um jogo de dominó com infinitas peças, cujo objetivo é enfileirá-las e derrubá-las. Saberemos que todas as peças cairão se:

(i) a 1ª peça cair;

(ii) a queda de uma peça produzir a queda da peça seguinte.



Obs.: Usaremos, na prática, a notação de sucessor de a, a^+, por $a+1$.

Assim: $1^+ = 2$; $2^+ = 3$; etc.

Vejamos um exemplo:

Ex.: Mostre que

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1).(2n+1)}{6}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Solução:

(i) BASE DA INDUÇÃO:

$$n=1: \quad 1^2 \overset{?}{=} \frac{1.(1+1).(2.1+1)}{6}$$

$$1 \overset{?}{=} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = 1. \quad \underline{\text{OK!}}$$

Logo, vale a base da indução.

(ii) Suponha que a igualdade seja verdadeira para um certo $n = k$, ou seja, que vale

$$1^2 + 2^2 + \dots + k^2 = \frac{k(k+1).(2k+1)}{6}.$$

(HIPÓTESE DA INDUÇÃO)

Precisamos mostrar que vale para $n = k^+ := k+1$, ou seja, mostrar que

$$1^2 + 2^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1).(k+1+2)(2(k+1)+1)}{6}$$

$$= \frac{(k+1).(k+2)(2k+3)}{6}$$

(TESE DA INDUÇÃO).

Da hipótese da indução, temos:

$$1^2 + 2^2 + \dots + k^2 = \frac{k(k+1).(2k+1)}{6}$$

Somando $(k+1)^2$ em ambos os lados da igualdade, vamos obter:

$$\underbrace{1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2} = \frac{k(k+1).(2k+1)}{6} + (k+1)^2$$

$$= \frac{k(k+1).(2k+1). + 6.(k+1)^2}{6}$$

$$= \frac{(k+1).[k(2k+1) + 6(k+1)]}{6}$$

$$= \frac{(k+1)(2k^2 + k + 6k + 6)}{6}$$

$$= \frac{(k+1).(2k^2 + 7k + 6)}{6} = \underbrace{\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}}$$

$$\begin{array}{r|l} \cancel{2k^2} + 7k + 6 & k+2 \\ \hline -\cancel{2k^2} - 4k & 2k+3 \\ \hline 3k + \cancel{6} & \\ -3k - \cancel{6} & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\Longrightarrow 2k^2 + 7k + 6 = (k+2)(2k+3)$$

Portanto, vale (ii)

De (i) e (ii) o resultado segue por indução.

$\square$

EXERCÍCIO: Mostre por indução que

$$1.2 + 2.3 + \dots + n.(n+1) = \frac{n(n+1).(n+2)}{3}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

ADIÇÃO EM $\mathbb{N}$:

Definimos a operação $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$,

$$(x, y) \mapsto x + y,$$

tal que $\forall\, a, b \in \mathbb{N}$;

$$a + b^+ = (a+b)^+$$

Por exemplo:

- $1 + 2 = 1 + 1^+ = (1+1)^+ = 2^+ = 3$
- $3 + 5 = 3 + 4^+ = (3+4)^+ = 7^+ = 8$