ARITMÉTICA

20/12/24 – AULA 08

PROPOSIÇÃO: (1º PRINCÍPIO DA INDUÇÃO MATEMÁTICA) Seja $a \in \mathbb{Z}$ e tal que, $\forall n \geq a$, vale uma afirmação $P(n)$.

Se:

(i) $P(a)$ for verdadeira;

(ii) Se $P(k)$ for verdadeira para um certo $k \geq a$, então $P(k+1)$ também é verdadeira;

Então, $P(n)$ é verdadeira $\forall n \in \mathbb{Z}$, $n \geq a$.

DEMONSTR.: Defina o conjunto

$$L = \{x \in \mathbb{Z} : x \geq a \text{ e } P(x) \text{ é falsa}\} \subset \mathbb{Z}$$

Precisamos mostrar que $L = \emptyset$.
Por absurdo, suponha que $L \neq \emptyset$.

Note que, $\forall x \in L$, $a \leq x$ (por construção)
Então L é um conjunto dos inteiros que é limitado inferiormente.

Pela proposição da aula passada (extensão do princípio da boa ordem), segue que

$$\exists\, m \in L \text{ tal que } m = \min L.$$

Estamos supondo válidas as hipóteses (i) e (ii).
Pelo item (i), $P(a)$ é verdadeira. Logo, temos que $a \notin L$, ou seja, $m = \min L$, então
$m > a$. Além disso, $P(m)$ é falsa. $(*)$

Então, como $m-1 < m = \min L$, ou seja, $m-1 \notin L$. Disso, $P(m-1)$ é verdadeira.
Pelo item (ii), sendo $P(m-1)$ verdadeira, segue que $P(m)$ é verdadeira, o que entra em contradição com $(*)$. Absurdo!
Portanto $L = \emptyset$, como queríamos mostrar. $\square$

EXEMPLOS:

01) Prove que
$$1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1, \quad \forall n \geq 1.$$

SOLUÇÃO:

(i) BASE DA INDUÇÃO: $n=1$ (1 aditivo).
$$1 \stackrel{?}{=} 2^1 - 1 = 1. \quad \underline{\underline{\text{OK!}}}$$

$n=2$ (2 aditivos):
$$1+2 \stackrel{?}{=} 2^2 - 1 \iff 3 = 4-1 \quad \underline{\underline{\text{OK!}}}$$

Logo, vale a base da indução.

(ii) Suponha a igualdade válida para um certo $n = k$, ou seja, que vale:

$$1 + 2 + \dots + 2^{k-1} = 2^k - 1.$$

(HIPÓTESE DA INDUÇÃO)

Precisamos mostrar que vale para $n = k+1$, ou seja, mostrar que

$$1 + 2 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 1$$

(TESE DA INDUÇÃO)

De fato; pela hipótese da indução, temos:

$$1 + 2 + \dots + 2^{k-1} = 2^k - 1$$

Somando 2^k em ambos os membros, vem:

$$1 + 2 + \dots + 2^{k-1} + 2^k = 2^k - 1 + 2^k =$$

$$= 2 \cdot 2^k - 1 = 2^{k+1} - 1$$

(TESE DA INDUÇÃO)

Logo, vale (ii)

Pelos itens (i) e (ii) o resultado segue por indução.

$\square$

02) Seja x um número inteiro positivo. Mostre que

$$(1+x)^n \geq 1+nx, \quad \forall n \geq 2.$$

[DESIGUALDADE DE BERNOULLI].

SOLUÇÃO: (i) $n=2$ (base da indução):

$$(1+x)^2 = 1+2x+\underbrace{x^2}_{>0} > 1+2.x$$

Logo, vale a base da indução.

(ii) Suponha que a desigualdade seja verdadeira para um certo $n=k$, ou seja, que vale

$$(1+x)^k > 1+k.x. \quad \text{(HIPÓTESE DA INDUÇÃO)}$$

Precisamos mostrar que vale para $n=k+1$, ou seja, mostrar que

$$(1+x)^{k+1} > 1+(k+1)x \quad \text{(TESE DA INDUÇÃO)}.$$

De fato;

$$(1+x)^{k+1} = \underbrace{(1+x)^k}_{>1+k.x}.(1+x) > (1+k.x).(1+x) =$$

$> 1+k.x$, PELA HIPÓTESE DA INDUÇÃO

$$= 1 + \underbrace{x + kx}_{} + k \cdot x^2 =$$

$$= 1 + (1+k) \cdot x + \underbrace{k \cdot x^2}_{>0} > 1 + (k+1) \cdot x$$

ou seja, mostramos que

$$(1+x)^{k+1} > 1 + (k+1)x \quad \text{(a tese da indução)}$$

Logo, vale (ii).

Portanto, pelos item (i) e (ii) o resultado segue pela indução matemática.

$\square$

---

03) Prove por indução que se A e B forem matrizes quadradas tais que $A \cdot B = B \cdot A$, então

$$A \cdot B^n = B^n \cdot A, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Solução:

(i) $n = 1$:

$$A \cdot B^1 = A \cdot B = B A = B^1 \cdot A.$$

HIPÓTESE DO EXERCÍCIO

Logo, vale a base da indução.

(ii) Suponha que a igualdade seja verdadeira para um certo $n = k$, ou seja, que vale

$$A \cdot B^k = B^k \cdot A \quad \text{(hipótese da indução)}$$

Precisamos mostrar que vale para $n = k+1$, ou seja, mostrar que

$$A \cdot B^{k+1} = B^{k+1} \cdot A \quad \text{(tese da indução)}$$

De fato,

$$A \cdot B^{k+1} = A \cdot (B^k \cdot B) \underset{\text{ASSOC. DO PRODUTO DE MATRIZES}}{=} (A \cdot B^k) \cdot B \underset{\text{HIPÓTESE DA INDUÇÃO}}{=} (B^k \cdot A) \cdot B \underset{\text{ASSOC.}}{=}$$

$$= B^k \cdot (AB) \underset{\text{HIPÓTESE DO EXERCÍCIO}}{=} B^k \cdot (BA) \underset{\text{ASSOC.}}{=} (B^k \cdot B) \cdot A = B^{k+1} \cdot A$$

Logo, vale (ii)

Portanto, pelos itens (i) e (ii) o resultado segue por indução, ou seja, mostramos que

$$A \cdot B^n = B^n \cdot A, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$\square$

04) Prove que $3^n < n!$, $\forall n > 6$.

solução:

(i) $n = 7$:

$$3^7 \overset{?}{<} 7!$$. Note que

$$3^7 = 3.3.3.3.3.3.3$$

$$7! = 7.6.5.4.3.2.1$$

2.3

ok!

Logo, vale a base da indução.

(ii) Suponha que a desigualdade seja verdadeira para um certo $n = k$, ou seja, que vale

$$3^k < k!\,, \quad k > 6. \qquad \text{(hipótese da indução)}$$

Precisamos mostrar que vale para $n = k+1$, ou seja, mostrar que

$$3^{k+1} < (k+1)! \qquad \text{(tese da indução)}$$

De fato; note que:

$$3^{k+1} = \underbrace{3^k}_{<k!} . 3 < k! . \underbrace{3}_{3<6<k<k+1} < k!(k+1) = (k+1)!$$

Obs.: também poderíamos fazer:

$$(k+1)! = (k+1).\underbrace{k!}_{>3^k} > (k+1).3^k \underset{\substack{\uparrow \\ k+1>k>6>3}}{>} 3.3^k = 3^{k+1}$$

ou seja, mostramos que

$$3^{k+1} < (k+1)!\ ,$$ provando (ii)

Pelos itens (i) e (ii) o resultado segue por indução matemática.

$\square$

Existe um segundo formato do princípio da indução matemática o qual enunciaremos sem demonstração, pois a prova é praticamente a mesma da anterior.

PROPOSIÇÃO: (2º PRINCÍPIO DA INDUÇÃO MATEMÁTICA) Seja $a \in \mathbb{Z}$ e tal que, $\forall n \geq a$, vale uma afirmação $P(n)$.

Se:

(i) $P(a)$ for verdadeira;

(ii) se $P(m)$ for verdadeira, $\forall m \in \mathbb{Z}$, tal que $a \leq m \leq k$, então $P(k+1)$ é verdadeira.

Então, $P(n)$ é verdadeira $\forall n \in \mathbb{Z}$, $n \geq a$.

EXEMPLO: Prove que todo número inteiro $n \geq 2$ pode ser escrito como um produto de números primos.(*)

SOLUÇÃO: (i) base da indução:

- $n = 2$. $n = 2$ (já é primo)
- $n = 3$ OK! (já é primo)
- $n = 4 = 2 . 2$ (produto de primos)

Logo, vale a base da indução.

(ii) suponha o resultado válido, $\forall$ m tal que

$2 \leq m \leq k$, i.e.; $\forall$ m entre 2 e k, m é representado como um produto de números primos.

Precisamos mostrar que $k+1$ também será representado por um produto de números primos. De fato:

- se $k+1$ já for primo, nada mais precisa ser feito;

(*) número primo é todo aquele que é divisível por 1 e por ele próprio ($n > 1$)

• Se $k+1$ não for primo, então é composto.

Logo, $k+1 = a_1 . a_2 \cdots . a_j$, onde

$2 \leq a_i \leq k$. Logo cada a_i

pode ser escrito como um produto de primos, devido à hipótese da indução.

Portanto, $k+1$ será um produto de números primos, provando (ii).

Pelos itens (i) e (ii) o resultado segue por indução matemática.

$\square$