CÁLCULO I

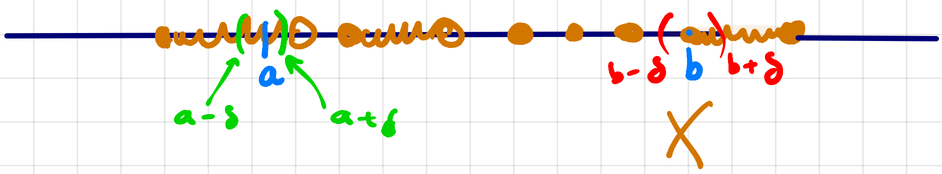
02/12/24 – AULA 06

LIMITES DE FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL REAL

Antes de iniciarmos o estudo propriamente dito, vamos introduzir dois conceitos da Topologia na reta.

Def: Seja $X \subset \mathbb{R}$ e $a \in X$. Dizemos que a é um ponto interior do conjunto X se, e só se, $\exists\ \delta > 0$ tal que $(a-\delta, a+\delta) \subset X$.

Em palavras, um ponto $a \in X$ é interior ao conjunto X se pudermos construir um intervalo centrado no ponto a de tal modo que o mesmo fique inteiramente contido no conj. X.

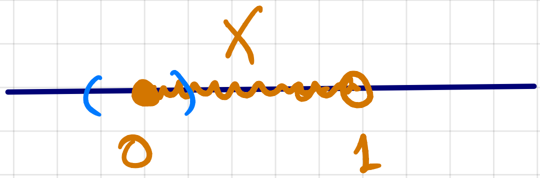


$(a-\delta, a+\delta) \subset X$. Logo, $a \in X$ é interior ao conjunto X.

Ainda, temos no desenho acima, que b não é ponto interior do conj. X, pois, $\forall\ \delta > 0$, $(b-\delta, b+\delta) \not\subset X$.

O conjunto de todos os pontos interiores de um conjunto X é chamado de INTERIOR de X, e é denotado por int X.

Ex.: $X = [0,1)$. $\operatorname{int}(X) = ?$

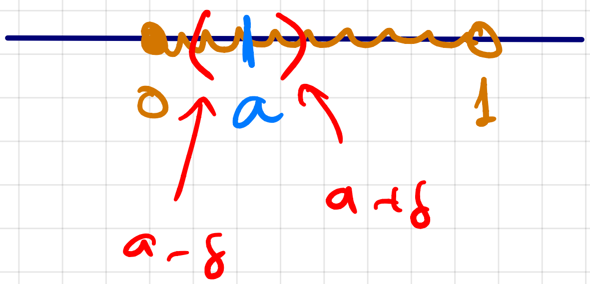


$0 \notin \operatorname{int} X$, pois, $\forall \delta > 0$, $(0-\delta, 0+\delta) \not\subset X$.

Qualquer $a \in X$, $a \neq 0$ estará no interior de X. De fato, basta tomar

$$\delta = \frac{1}{2} \cdot \min\{\underbrace{d(a,0)}, d(a,1)\}$$

distância de a até 0



E isto vale $\forall a \in X$, $a \neq 0$.

Conclusão: $\operatorname{int}[0,1) = (0,1)$

PROPOSIÇÃO: Seja $X \subset \mathbb{R}$. Então $\operatorname{int} X \subset X$.

DEMONSTR.: Dado $a \in \operatorname{int} X$ um ponto qualquer.

Precisamos mostrar que $a \in X$.

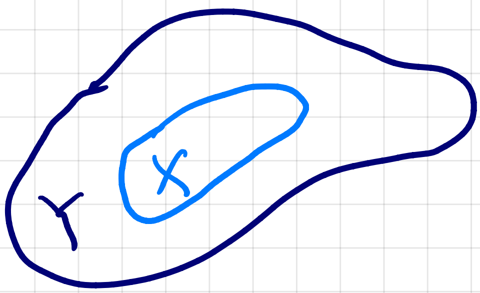
Como $a \in \operatorname{int} X$, então $\exists\, \delta > 0$ tal que $(a-\delta, a+\delta) \subset X$. Em particular tem-se que $a \in X$.

Pela arbitrariedade da escolha do ponto $a \in X$ conclui-se que $\operatorname{int} X \subset X$.

$\square$

PROPOSIÇÃO: Sejam $X, Y \subset \mathbb{R}$. Então,

$$X \subset Y \implies \operatorname{int} X \subset \operatorname{int} Y.$$



DEMONSTR.: Dados $X, Y \subset \mathbb{R}$ com $X \subset Y$.

Dado $a \in \operatorname{int} X$. A mostrar: $a \in \operatorname{int} Y$.

Como $a \in \operatorname{int} X$, segue que $\exists\, \delta > 0$ tal que $(a-\delta, a+\delta) \subset X$. Como por hipótese $X \subset Y$, pela transitividade da contenção segue que

$$(a-\delta, a+\delta) \subset Y,$$

ou seja, a é ponto interior ao conj. Y, i.e. $a \in \text{int}\, Y$.

Pela arbitrariedade da escolha do ponto a, segue a contenção desejada, ou seja,

$$\text{int}\, X \subset \text{int}\, Y.$$

$\square$

Def.: Dizemos que um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é um aberto de $\mathbb{R}$ se, e só se, todos os seus pontos forem interiores.

Ou seja, $X \subset \mathbb{R}$ é um aberto se, e só se,

$$X = \text{int}\, X.$$

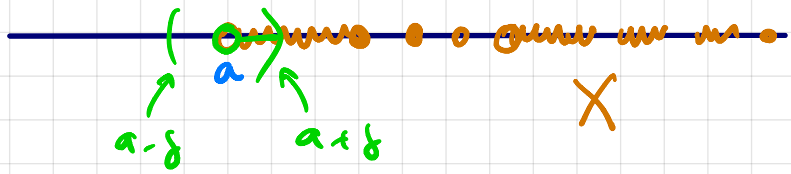
Como sempre vale que $\text{int}\, X \subset X$, c.f. mostrado anteriormente, podemos enfraquecer a definição acima, dizendo que:

Def': Dizemos que $X \subset \mathbb{R}$ é um aberto de $\mathbb{R}$ se, e só se, $X \subset \text{int}\, X$.

Ex.: $(0,1)$ é um aberto, pois $\text{int}(0,1) = (0,1)$

__Def:__ Seja $X \subset \mathbb{R}$. Dizemos que $a \in \mathbb{R}$ é um <u>ponto de acumulação</u> do conjunto X se, e somente se, existir um intervalo centrado em a, exceto o próprio ponto a, que tenha interseção com o conj. X. Ou seja, $a \in \mathbb{R}$ é ponto de acumulação do conj. X se, e só se, $\forall \delta > 0$,

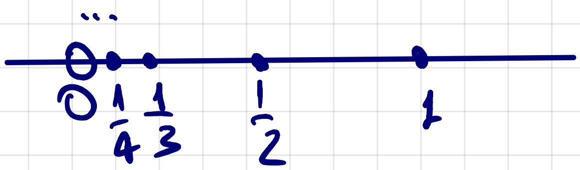
$$((a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}) \cap X \neq \emptyset.$$



$a \in \mathbb{R}$ é ponto de acumulação de X.

__Ex.1__ $X = \{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \}$ __obs.:__ $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

Obviamente, temos que $0 \notin X$.



No entanto, tomando, por exemplo, $0 < \delta < 1$, basta tomar $m \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{m} < \delta$, ou seja, $\frac{1}{m} \in X$ e é tal que

$$\frac{1}{m} \in (0-\delta, 0+\delta) \setminus \{0\}.$$

Ou seja, 0 é ponto de acumulação do conj. X.

Uma outra forma de dizer que $a \in \mathbb{R}$ é um ponto de acumulação de um conj. $X \subset \mathbb{R}$ é se, e só se, $\forall \delta > 0$, $\exists x \in X$ tal que

$$0 < |x - a| < \delta$$

diz que $x \neq a$.

$$-\delta < x - a < \delta$$
$$\Updownarrow$$
$$a - \delta < x < a + \delta$$

$$|w| < a$$
$$\Updownarrow$$
$$-a < w < a.$$

Def.: O conjunto de todos os pontos de acumulação de um conj. X é chamado de DERIVADO de X, e é denotado por X'.

Frente a estes conceitos podemos, finalmente, iniciar o estudo de limites de funções de uma variável real.

LIMITES:

Def.: Sejam $f: X \to \mathbb{R}$ uma função e $a \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação do conj. X. (i.e.; $a \in X'$).

Dizemos que $L \in \mathbb{R}$ é o LIMITE da $f(x)$ QUANDO x TENDE PARA a, e escrevemos

$$L = \lim_{x \to a} f(x),$$

se, e somente se,

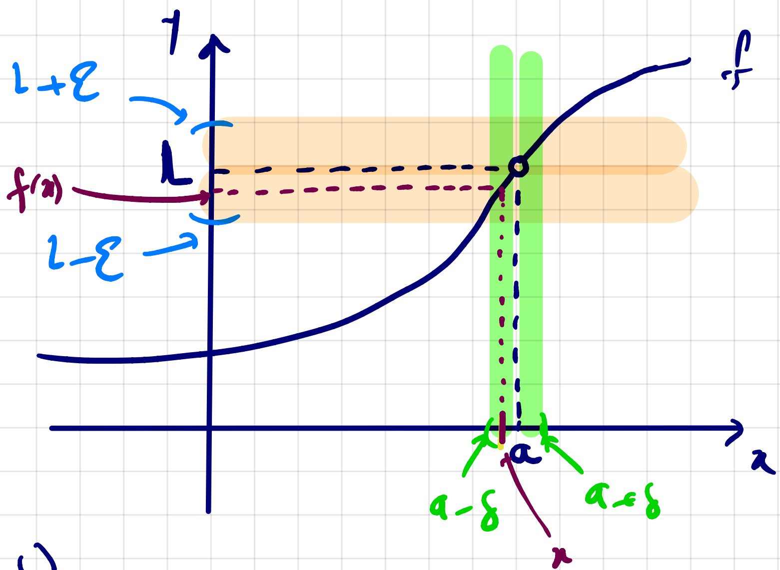
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ tal que}, \forall x \in X: 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Vejamos um esquema ilustrando esta definição:

DADA $f: X \to \mathbb{R}$, $a \in X'$.

TOME $\varepsilon > 0$.

CONSTRÓI-SE O INTERVALO $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$



CONSEGUE-SE ENCONTRAR UM RAIO $\delta > 0$ e CONSTRÓI-SE O CONJUNTO $(a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$

DISSO, $\forall x \in (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$, i.e., x tal que $0 < |x - a| < \delta$, é <u>GARANTIDO</u> QUE $f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$, OU SEJA, QUE $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Obs: 01) Na definição acima, a sentença:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ tal que } \dots$$

estabelece que, para qualquer $\varepsilon > 0$ escolhido, vai existir um $\delta > 0$, e tal δ dependente da escolha do ε, ou seja, $\delta = \delta(\varepsilon)$.

02) Quando $\nexists \lim_{x \to a} f(x)$? Quando negarmos a definição, ou seja, precisamos estabelecer a negação da sentença:

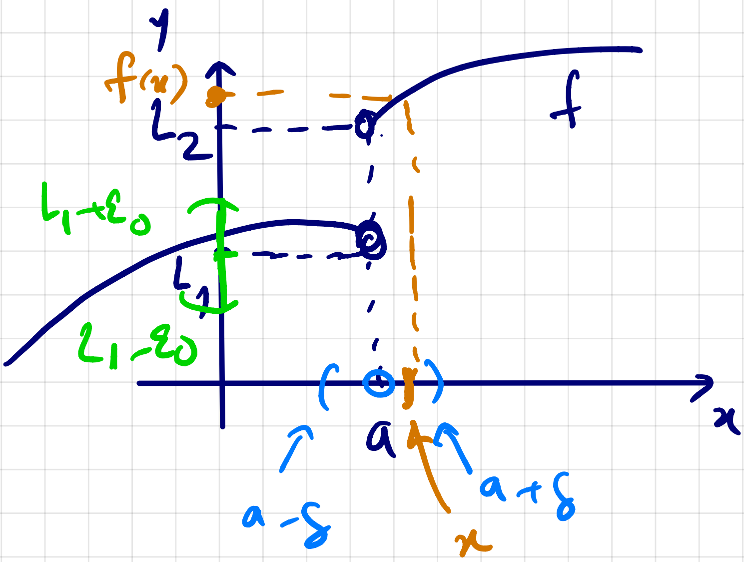
$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0$ tal que, $\forall x \in X: 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$;

que será:

$\exists \varepsilon_0$ tal que, $\forall \delta > 0$, $\exists x \in X: 0 < |x - a| < \delta$, mas

$$|f(x) - L| \geq \varepsilon_0$$

Ex.:



¿$\exists \lim_{x \to a} f(x)$?

Se $\lim_{x \to a} f(x) = L_1$, então, tomando ε_0 como no esquema acima, temos que, $\forall \delta > 0$,

$(a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$, é tal que, o x ali destacado é tal que $f(x) \notin (L_1 - \varepsilon_0, L_1 + \varepsilon)$

Portanto, L_1 não é limite de $f(x)$ quando $x \to a$.

Do mesmo modo tem-se que L_2 não é limite de $f(x)$ quando $x \to a$.

Conclusão: $\nexists \lim_{x \to a} f(x)$.

Vejamos alguns exemplos:

01) Prove que $\lim_{x \to 1} 2x+3 = 5$.

(Aqui, definimos $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x+3$)

Solução: Dado $\varepsilon > 0$, precisamos encontrar $\delta > 0$ tal que, $\forall x \in D(f)$, tal que $0 < |x-1| < \delta$, implica em $|f(x) - 5| < \varepsilon$.

Analisando $|f(x) - 5|$, teremos:

$$|f(x)-5| = |2x+3-5| = |2x-2| = |2.(x-1)| =$$

$$2.\underbrace{|x-1|}_{<\delta} < 2.\delta := \varepsilon$$

Ou seja, basta tomar $2\delta = \varepsilon$, i.e., $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Isto mostra que $\lim_{x\to 1} f(x) = 5$. $\square$

Obs.: Vamos ilustrar o exemplo; tomando $\varepsilon = 0{,}5$.

Então, teremos $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2} = \dfrac{0{,}5}{2} = 0{,}25$.

Assim, $\forall x \in D(f)$: tal que $0 < |x-1| < 0{,}25 = \delta$,

é garantido que $|f(x)-5| < 0{,}5$.

Ex.: $x = 0{,}8$. Então: $0 < |0{,}8 - 1| = 0{,}2 < 0{,}25$.

$$\Rightarrow |f(x)-5| = |2.0{,}8+3-5| = 0{,}4 < 0{,}5 = \varepsilon.$$