Fundação Universidade Federal de Pelotas
Curso de Licenciatura em Matemática
Disciplina de Cálculo I
Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 2 de Exercícios - Funções hiperbólicas. Limites de funções

1. Em cada item a seguir é dado o valor de uma função hiperbólica. Determine as outras cinco.

   (a) $\operatorname{senh} x = -\dfrac{3}{4}$. (b) $\operatorname{sech} x = \dfrac{3}{5}$, $x < 0$. (c) $\tanh x = -\dfrac{7}{25}$.

2. Dados $\tanh(a+b) = 3$ e $\tanh b = 2$, achar $\cosh a$.

3. Encontre os valores de x que verificam cada igualdade: $\tanh x = \dfrac{1}{2}$; $\cosh x = 2$.

4. Demonstre que

   (a) $\operatorname{senh}(v - w) = \operatorname{senh} v \cdot \cosh w - \operatorname{senh} w \cdot \cosh v$.

   (b) $\operatorname{csch} 2x = \dfrac{1}{2}\operatorname{sech} x \cdot \operatorname{csch} x$. (c) $\tanh(\ln x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$.

5. Esboçar o gráfico de cada função a seguir, indicando domínio e imagem.

   (a) $f(x) = 1 - \operatorname{senh} x$ (b) $f(x) = \operatorname{senh}(x - 1)$
   (c) $f(x) = 1 - 2\operatorname{senh}(1 - x)$ (d) $f(x) = \cosh(x - 2)$
   (e) $f(x) = 2 - \operatorname{sech} x$ (f) $f(x) = 1 - 2\coth(1 - x)$

6. Calcule o valor numérico da expressão $\operatorname{arcsenh} 0,25 + \operatorname{arcsenh} \dfrac{3}{4}$.

7. Esboce o gráfico de cada função abaixo, indicando domínio e imagem:

   (a) $f(x) = 1 - \operatorname{arcsenh} x$ (b) $f(x) = 1 + \operatorname{arccosh}(1 - x)$

8. Para quaisquer $X, Y \subset \mathbb{R}$, prove que

   (a) $\operatorname{int}(X \cap Y) = \operatorname{int}(X) \cap \operatorname{int}(Y)$.
   (b) $\operatorname{int}(X) \cup \operatorname{int}(Y) \subset \operatorname{int}(X \cup Y)$.

9. Mostrar com um exemplo que, dados $X, Y \subset \mathbb{R}$, $\operatorname{int}(X \cup Y) \neq \operatorname{int}(X) \cup \operatorname{int}(Y)$.

10. Se $A = [0,1) \cup (1,2] \cup \{3\}$, determine $\operatorname{int}(A)$. Decida quais dos seguintes pontos é de acumulação do conjunto A, justificando: $0, 1, 2$ e 3.

11. Qual é o interior do conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{Q}^2 : x < y\}$ em relação a $\mathbb{R}^2$? Justifique.

12. Mostre que o subconjunto $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < y\}$ é um aberto de $\mathbb{R}^2$.

13. Mostre que o conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1,\ x > 0,\ y > 0\}$ é um aberto do $\mathbb{R}^2$.

14. Usando a notação δ - ε, prove cada limite abaixo:

    (a) $\lim\limits_{x \to 2} 3x - 1 = 5$. (b) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x - 1}{x + 2} = \dfrac{3}{4}$. (c) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} \operatorname{sen} x = \dfrac{1}{2}$.

15. Calcule cada limite a seguir, se existir:

(a) $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{6 - 3x}$ (b) $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^4 - 1}{x - 1}$ (c) $\lim_{x \to -2} \dfrac{x^2 + 3x + 2}{2x^2 - 3x - 14}$

(d) $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^5 - 32}{4 - x^2}$ (e) $\lim_{x \to -1} \dfrac{\sqrt{x+3} - \sqrt{2}}{3x - 3}$ (f) $\lim_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x^2 - 5} - \sqrt{x+1}}{x^2 - 2x - 3}$

16. Esboce o gráfico e verifique se existe limite de cada função real de variável real em cada ponto indicado. Existindo, calcule-o.

(a) $f(x) = \begin{cases} 2x - 3, & \text{se } x < 2 \\ 9 - 4x, & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$ no ponto $x = 2$.

(b) $f(x) = \begin{cases} x + 3, & \text{se } x < -1 \\ x^2, & \text{se } -1 \leq x < 2 \\ 2x, & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$ nos pontos $x = -1$ e $x = 2$.