CÁLCULO I

25/11/24 - AULA 05

AULA DE DÚVIDAS / EXERCÍCIOS.

L1

2. Sejam f e g funções reais (i.e., $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$) definidas pelas leis

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 4, & \text{se } x \geq 1 \\ 3x + 4, & \text{se } x < 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad g(x) = x - 3$$

Determine a lei que define $f \circ g$.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \begin{cases} (g(x))^2 + 2 \cdot g(x) + 4, & \text{se } g(x) \geq 1 \\ 3 \cdot g(x) + 4, & \text{se } g(x) < 1. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (x-3)^2 + 2 \cdot (x-2) + 4, & \text{se } x - 3 \geq 1 \\ 3 \cdot (x-3) + 4, & \text{se } x - 3 < 1. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x^2 - 6x + 9 + 2x \cancel{-4} \cancel{+4}, & \text{se } x \geq 4 \\ 3x - 9 + 4, & \text{se } x < 4. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x^2 - 4x + 9, & \text{se } x \geq 4 \\ 3x - 5, & \text{se } x < 4. \end{cases}$$

$$(0,\tfrac{\pi}{2}) \xrightarrow{g} (0,+\infty) \xrightarrow{f} (0,+\infty)$$
$$f\circ g$$

LL

8. Sejam as funções $f : (0,+\infty) \to (0,+\infty)$ e $g : (0, \frac{\pi}{2}) \to (0,+\infty)$ dadas respectivamente por

1º.

$$f(x) = \sqrt{1 - \frac{1}{e^x}} \quad \text{e} \quad g(x) = 2\ln\csc x$$

Construa o gráfico de $h = f \circ g$, indicando domínio e imagem. h é periódica? h é bijetiva?

$$h(x) = (f\circ g)(x) = f(g(x)) = f(2\ln\csc x) =$$

$$= \sqrt{1 - \frac{1}{e^{2\ln\csc x}}} = \sqrt{1 - \frac{1}{e^{\ln(\csc x)^2}}}$$

$$a\ln b = \ln b^a$$

$$e^{\ln w} = e^{\log_e w} = w$$

$$= \sqrt{1 - \frac{1}{\csc^2 x}} = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x} =$$

$$\frac{1}{\csc\alpha} = \operatorname{sen}\alpha$$

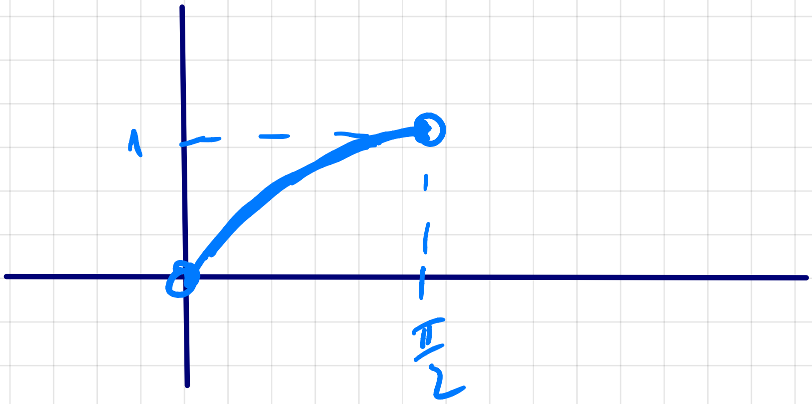
$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\cos^2\alpha = 1 - \operatorname{sen}^2$$

$$= \sqrt{\cos^2 x} = |\cos x| = \cos x$$

1º q.

$h(x) = \operatorname{sen} x$; $\quad h : (0, \frac{\pi}{2}) \to (0, +\infty)$



$D(h) = (0, \frac{\pi}{2})$

$Im(h) = (0, 1)$

h não é periódica.

h não é bijetiva, pois não é sobrejetiva, visto que $Im(h) = (0,1) \neq (0,+\infty) = CD(h)$

L1

3. Sendo as funções $f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}\setminus\{1\}$ dada por $f(x) = \dfrac{x+2}{x}$ e $g : \mathbb{R}\setminus\{1\} \to \mathbb{R}\setminus\{0\}$ dada por $g(x) = \dfrac{2}{x-1}$. Determine $g \circ f$ e $f \circ g$. O que se conclui do resultado obtido?

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}\setminus\{0\} \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & \mathbb{R}\setminus\{1\} \arrow[r, "g"] & \mathbb{R}\setminus\{0\} \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}\setminus\{1\} \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "f \circ g"'] & \mathbb{R}\setminus\{0\} \arrow[r, "f"] & \mathbb{R}\setminus\{1\} \end{tikzcd}$$

- $g \circ f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{x+2}{x}\right) = \frac{2}{\frac{x+2}{x} - 1}$$

$$= \frac{2}{\frac{\cancel{x}+2-\cancel{x}}{x}} = \frac{2}{\frac{2}{x}} =$$

$$= \cancel{2} \times \frac{x}{\cancel{2}} = x = id_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}(x)$$

- $f \circ g : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{2}{x-1}\right) = \frac{\frac{2}{x-1} + 2}{\frac{2}{x-1}}$$

$$= \frac{\frac{\cancel{2} + 2x \cancel{-2}}{\cancel{x-1}}}{\frac{2}{\cancel{x-1}}} = \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}} = x = id_{\mathbb{R}\setminus\{1\}}(x)$$

Portanto, f e g são inversas uma da outra.

Um pouco mais sobre funções hiperbólicas:

Vimos em aula que

$$(*) \quad \boxed{\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1.} \quad \text{[RELAÇÃO HIPERBÓLICA FUNDAMENTAL]}$$

Podemos derivar outras duas relações desta:

Divida $(*)$ por $\cosh^2 x > 0$:

$$\frac{\cancel{\cosh^2 x}}{\cancel{\cosh^2 x}} - \frac{\operatorname{senh}^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

$$\boxed{1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x}$$

Dividindo $(*)$ por $\operatorname{senh}^2 x$ (e desconsiderando em $x=0$, pois neste caso teríamos $\operatorname{senh}^2 0 = 0$)

→ DIVISÃO POR ZERO

$$\frac{\cosh^2 x}{\operatorname{senh}^2 x} - \cancel{\frac{\operatorname{senh}^2 x}{\operatorname{senh}^2 x}} = \frac{1}{\operatorname{senh}^2 x}$$

$$\frac{1}{\tanh^2 x} - 1 = \operatorname{csch}^2 x$$

$$\boxed{\coth^2 x - 1 = \operatorname{csch}^2 x}$$

$$\boxed{\frac{1}{\tanh x} := \coth x}$$

Adição de arcos:

$$\operatorname{senh}(x+y) = \operatorname{senh}x \cdot \cosh y + \operatorname{senh}y \cdot \cosh x.$$

$$\underbrace{\operatorname{senh}x\cosh y + \operatorname{senh}y \cdot \cosh x} =$$

$$= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y + e^{-y}}{2} + \frac{e^y - e^{-y}}{2} \cdot \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \left[(e^x - e^{-x}) \cdot (e^y + e^{-y}) + (e^y - e^{-y}) \cdot (e^x + e^{-x}) \right]$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \left[e^x \cdot e^y + e^x \cdot e^{-y} - e^{-x} \cdot e^y - e^{-x} \cdot e^{-y} + e^y \cdot e^x + e^y \cdot e^{-x} - e^{-y} \cdot e^x - e^{-y} \cdot e^{-x} \right]$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \left[e^{x+y} + \cancel{e^{x-y}} - \cancel{e^{-(x-y)}} - e^{-(x+y)} + e^{x+y} + \cancel{e^{-(x-y)}} - \cancel{e^{x-y}} - e^{-(x+y)} \right]$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \left[-2 \cdot e^{-(x+y)} + 2 \cdot e^{x+y} \right] = \frac{e^{x+y} - e^{(x+y)}}{2}$$

$$= \text{senh}\,(x+y)$$