Cálculo I

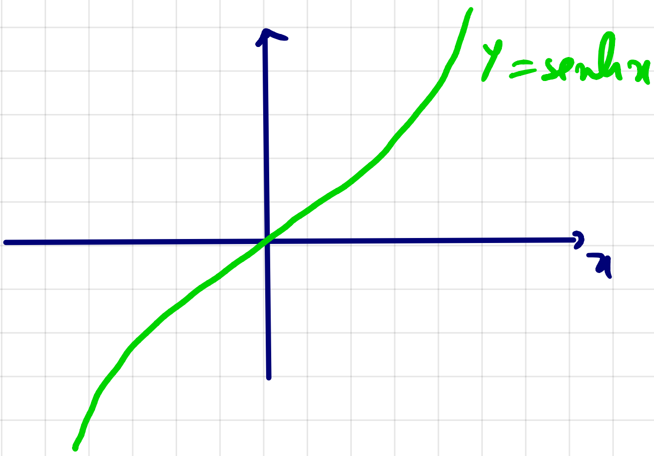
$\boxed{22/11/24 \text{ - AULA 04}}$

FUNÇÕES HIPERBÓLICAS INVERSAS:

FUNÇÃO ARCO SENO HIPERBÓLICO: Primeiramente, observe que a função seno hiperbólico $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

é bijetiva. Graficamente podemos notar:



Claramente, f é injetiva, pois é crescente. Além disso, f também é sobrejetiva, pois

$$\operatorname{Im}(f) = \mathbb{R} = CD(f)$$

Portanto, f é bijetiva. Então, $\exists\, f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, inversa da f, que denotaremos por

$$x = f^{-1}(y) = \operatorname{arcsenh} y$$

Para isto, basta, de $y = \operatorname{senh} x$, isolar o x:

$$y = \operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \Rightarrow 2y = e^x - e^{-x}$$

$$2y = e^x - \frac{1}{e^x} \qquad \times (e^x)$$

$$2y \cdot e^x = e^{2x} - 1$$

$$\boxed{e^{2x} - 2y \cdot e^x - 1 = 0} \qquad (*)$$

Escreva $e^x = w$. Então: $e^{2x} = (e^x)^2 = w^2$,

e disso, $(*)$ fica:

$$w^2 - 2y \cdot w - 1 = 0,$$

uma eq. de 2º grau literal na variável w.

$$w = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2 + 4}}{2} = \frac{2y \pm \sqrt{4(y^2+1)}}{2}$$

$$w = \frac{2y \pm 2\sqrt{y^2+1}}{2} = \frac{\cancel{2} \cdot \left(y \pm \sqrt{y^2+1}\right)}{\cancel{2}}$$

$$w = y \pm \sqrt{y^2+1} \quad \begin{cases} w = y + \sqrt{y^2+1} \\ w = y - \sqrt{y^2+1} \end{cases}$$

Como $e^x = w$, temos:

$$e^x = y + \sqrt{y^2+1} \quad C \qquad \text{ou} \qquad \cancel{e^x = y - \sqrt{y^2+1}}$$

ABSURDO, POIS

$y^2 + 1 > y^2$

$\Rightarrow \sqrt{y^2+1} > \sqrt{y^2} = y$

$\Rightarrow y - \sqrt{y^2+1} < 0$,

MAS e^x SEMPRE É > 0

$$\Longrightarrow e^x = y + \sqrt{y^2+1}$$

$$\ln e^x = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)$$

$$x = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)$$

$$\|$$

$$f^{-1}(y)$$

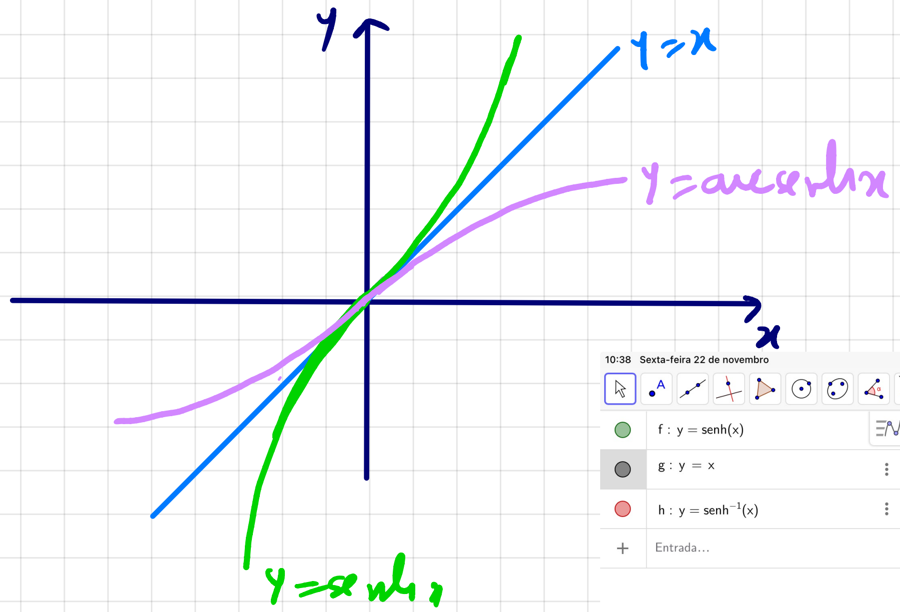
$$\|$$

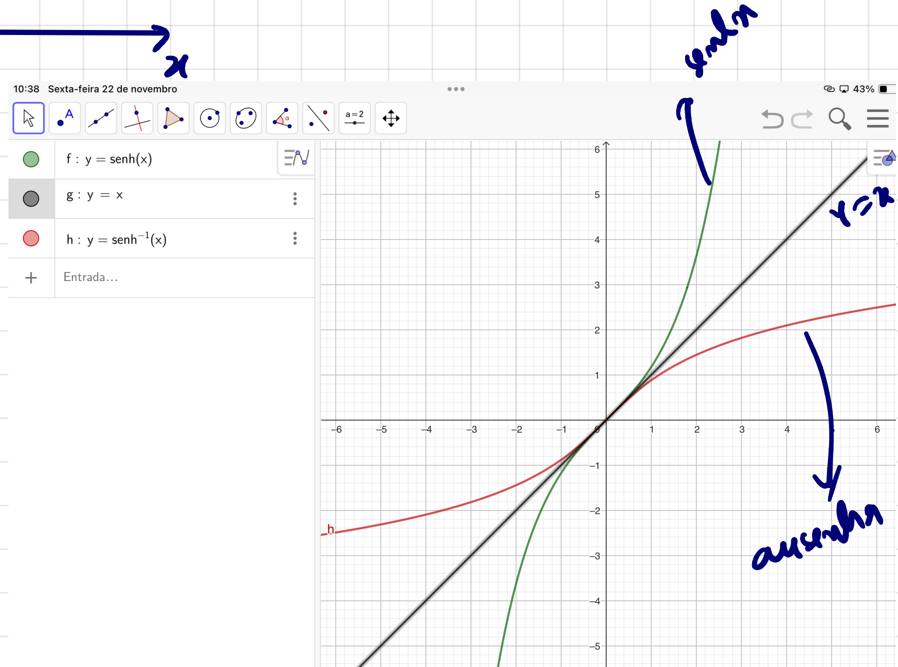
$$\text{arcsenh}\, y$$

Ou seja, define-se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \text{arcsenh}\, x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

Esboço gráfico: basta espelhar o gráfico de $y = \text{senh}\, x$ sobre a bissetriz dos quadrantes ímpares $y = x$:





Ex.: da lista 02

6. Calcule o valor numérico da expressão arcsenh 0, 25 + arcsenh $\frac{3}{4}$.

$\frac{1}{4}$

$$\text{arcsenh}\,\frac{1}{4} + \text{arcsenh}\,\frac{3}{4} =$$

$$= \ln\left(\frac{1}{4} + \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + 1}\right) + \ln\left(\frac{3}{4} + \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 1}\right)$$

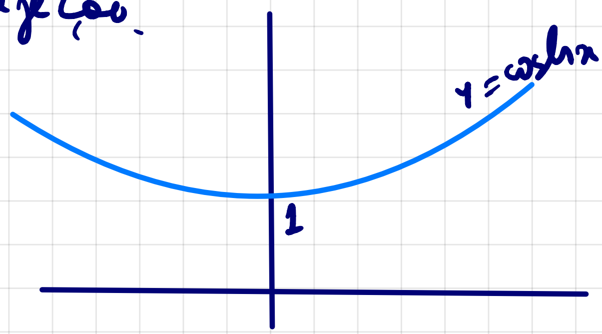
$$= \ln\left(\frac{1}{4} + \sqrt{\frac{17}{16}}\right) + \ln\left(\frac{3}{4} + \sqrt{\frac{10}{16}}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{1 + \sqrt{17}}{4}\right) + \ln\left(\frac{3 + \sqrt{10}}{4}\right)$$

FUNÇÃO ARCO COSSENO HIPERBÓLICO:

A função cosseno hiperbólico $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cosh x$,

não é bijetiva. Então, para obter uma inversa, precisamos de definir o domínio e o contradomínio do cosseno hiperbólico, de modo a tornar-se uma bijeção.



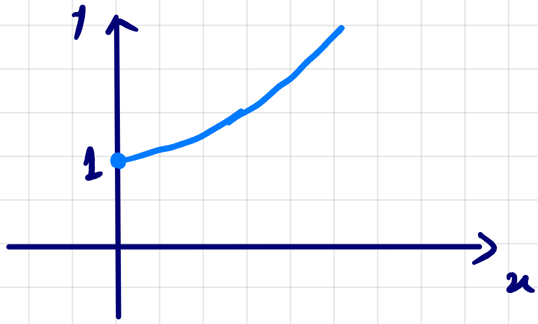
Note que $y = \cosh x$ não é injetiva, pois é uma função par. Além disso, não é sobrejetiva, pois

$\text{Im}(f) = [1, +\infty) \neq \mathbb{R} = \text{CD}(f)$

Redefinindo-a, pondo:

$$f: [0,+\infty) \longrightarrow [1,+\infty)$$

$$f(x) = \cosh x$$, bijetiva. (pois é crescente e $Im(f) = [1,+\infty) = CD(f)$.



Portanto, existe inversa $f^{-1}: [1,+\infty) \longrightarrow [0,+\infty)$

$$x = f^{-1}(y) := \operatorname{arccosh} y$$, onde:

$$y = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$, e então, precisamos isolar a variável x.

$$2y = e^x + e^{-x}$$

$$2y = e^x + \frac{1}{e^x} \qquad (\times e^x)$$

$$2y \cdot e^x = e^{2x} + 1 \Rightarrow e^{2x} - 2y \cdot e^x + 1 = 0$$

Escreva $w = e^x$. Então:

$$\boxed{w^2 - 2y \cdot w + 1 = 0}$$

$$w = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2 - 4}}{2} = \frac{2y \pm 2\sqrt{y^2-1}}{2}$$

$$\Rightarrow w = y \pm \sqrt{y^2-1} \quad \begin{cases} \nearrow w = y + \sqrt{y^2-1} \\ \searrow w = y - \sqrt{y^2-1} \end{cases}$$

Voltando à variável principal: $e^x = w$:

$$e^x = y + \sqrt{y^2-1} \quad \text{ou} \quad e^x = y - \sqrt{y^2-1}$$

$$\ln e^x = \ln(y + \sqrt{y^2-1}) \quad \text{ou} \quad \ln e^x = \ln(y - \sqrt{y^2-1})$$

$$x = \ln(y + \sqrt{y^2-1}) \quad \text{ou} \quad \underline{x = \ln(y - \sqrt{y^2-1})}$$

Obs.: Note que $y \geq 1$

$$y^2 - 1 \geq 0$$

$$y^2 > y^2 - 1$$

$$\sqrt{y^2} > \sqrt{y^2-1}$$

$$y > \sqrt{y^2-1}$$

$$(-\sqrt{y^2-1})$$

$$y - \sqrt{y^2-1} > \sqrt{y^2-1} - \sqrt{y^2-1}$$

$$y - \sqrt{y^2-1} > 0$$

Além disso:

SUPONDO POR ABSURDO

se $y - \sqrt{y^2-1} > 1$,

então

$$y - 1 > \sqrt{y^2-1}$$

Elevando ao quadrado:

$$(y-1)^2 > (\sqrt{y^2-1})^2$$

$$\cancel{y^2} - 2y + 1 > \cancel{y^2} - 1$$

$$-2y > -2$$

$$\Rightarrow y < 1. \quad \underline{\text{Absurdo!}}$$

conclusão: $x = \ln\left(y - \sqrt{y^2-1}\right)$ é tal que

$$0 < y - \sqrt{y^2-1} < 1,$$ então

$$x = \ln\left(y - \sqrt{y^2-1}\right) < 0,$$ um absurdo!

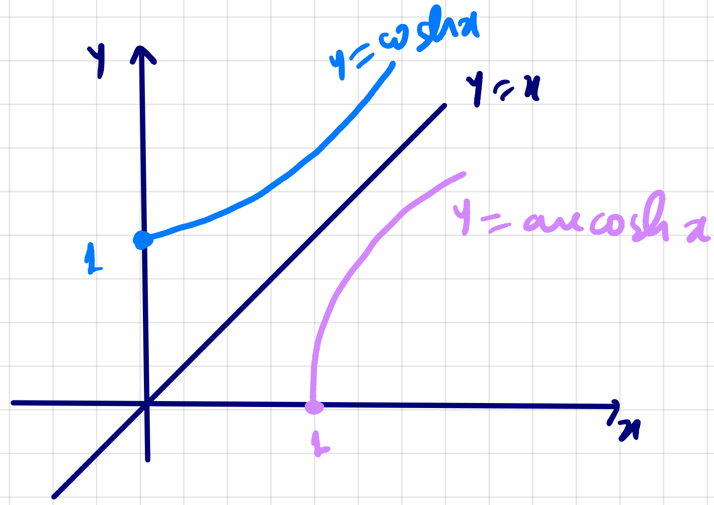
Por isso, a única resposta que podemos admitir é

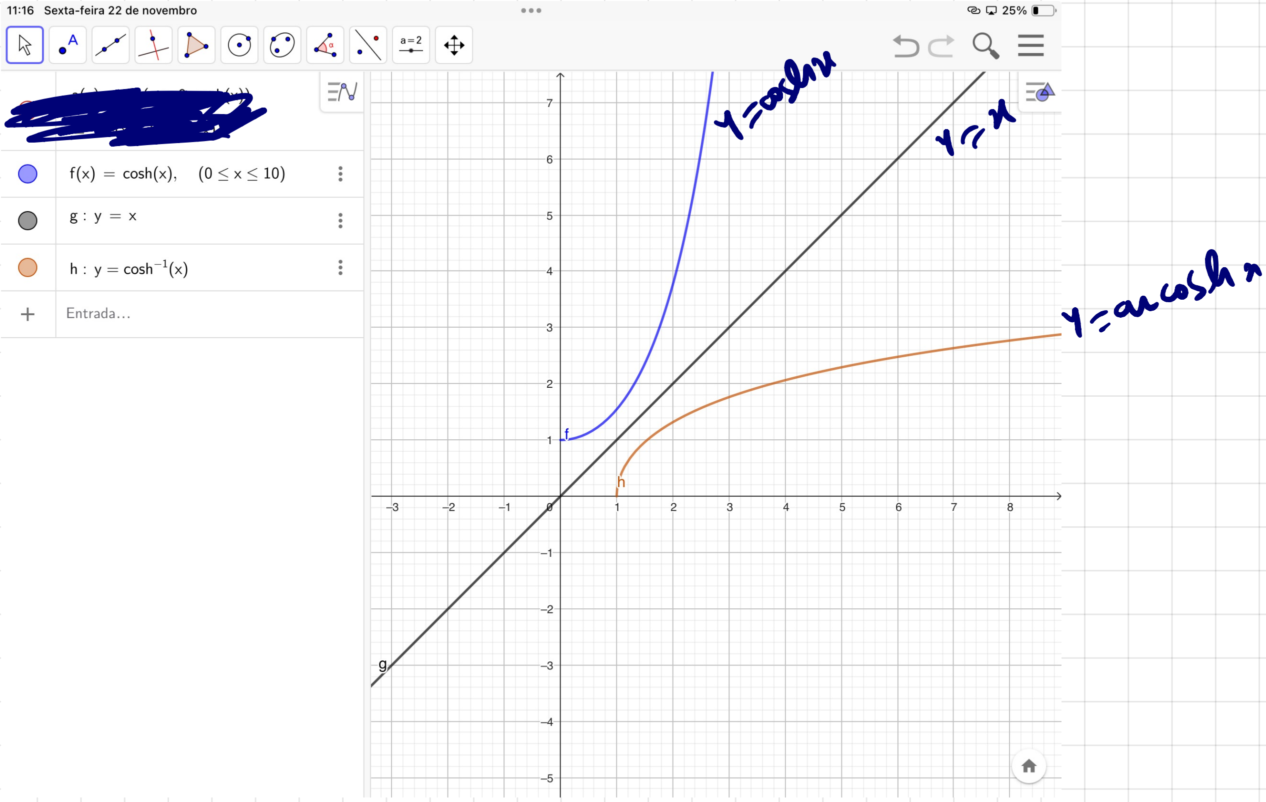
$$x = \ln\left(y + \sqrt{y^2-1}\right)$$
$$\|$$
$$\operatorname{arccosh} y$$

Ou seja, definimos $f : [1, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$,

$$f(x) = \operatorname{arccosh} x = \ln\left(y + \sqrt{y^2-1}\right)$$

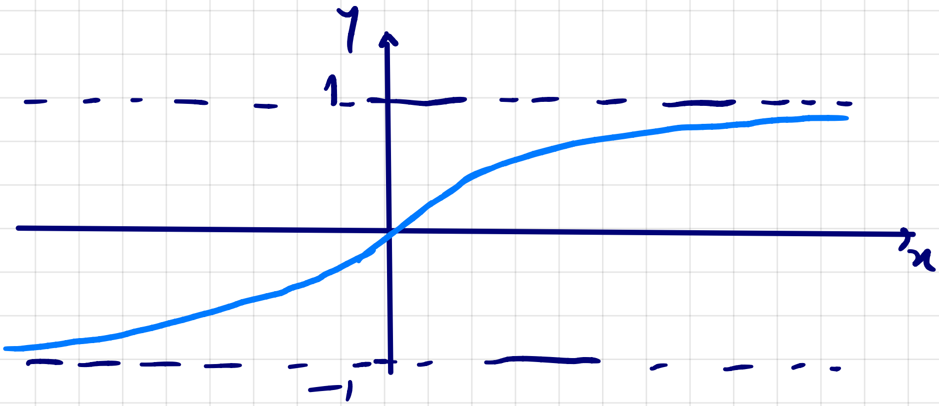
Esboço gráfico: basta espelhar sobre $y=x$ o gráfico do cosseno hiperbólico (o bijetivo)





FUNÇÃO ARCO TANGENTE HIPERBÓLICA:

A função $y = \tanh x$ não é bijetiva. Então, também precisamos redefini-la de modo a torná-la bijetiva. (injetiva ela é, pois é crescente, só não é sobrejetiva)



Redefina-a por:

$f: \mathbb{R} \to (-1,1)$

$f(x) = \tanh x$;

bijeção.

Assim, $\exists\, f^{-1}: (-1,1) \to \mathbb{R}$, inversa, e será

$$f^{-1}(y) = x = \operatorname{arctanh} y,$$

onde $y = \tanh x$. Então, basta isolar o x:

$$y = \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$y = \frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{e^x + \frac{1}{e^x}} \Leftrightarrow y = \frac{\frac{e^{2x} - 1}{\cancel{e^x}}}{\frac{e^{2x} + 1}{\cancel{e^x}}}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \quad ; \quad e^{2x} = w$$

$$y = \frac{w-1}{w+1}$$

$$y \cdot (w+1) = w - 1$$

$$y \cdot w + y = w - 1$$

$$w \cdot y - w = -1 - y$$

$$w(y-1) = -y - 1$$

$$w = \frac{1+y}{1-y}$$

$$e^{2x} = \frac{1+y}{1-y}$$

$$\ln e^{2x} = \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$$

$$2 \cdot \ln e^x = \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$$

$$\ln e^x = \frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right).$$

Ou seja, obtemos a inversa

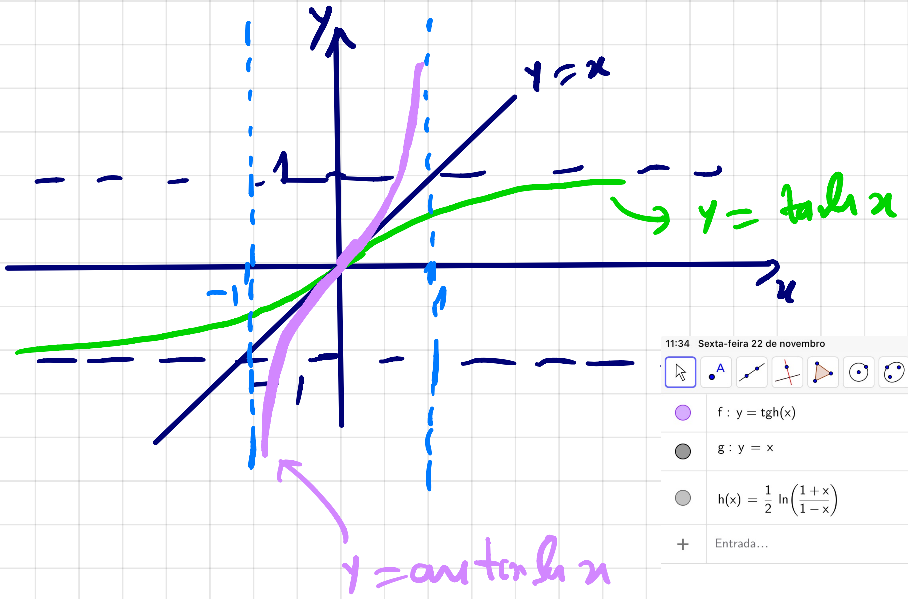
$$f^{-1}: (-1,1) \to \mathbb{R},$$

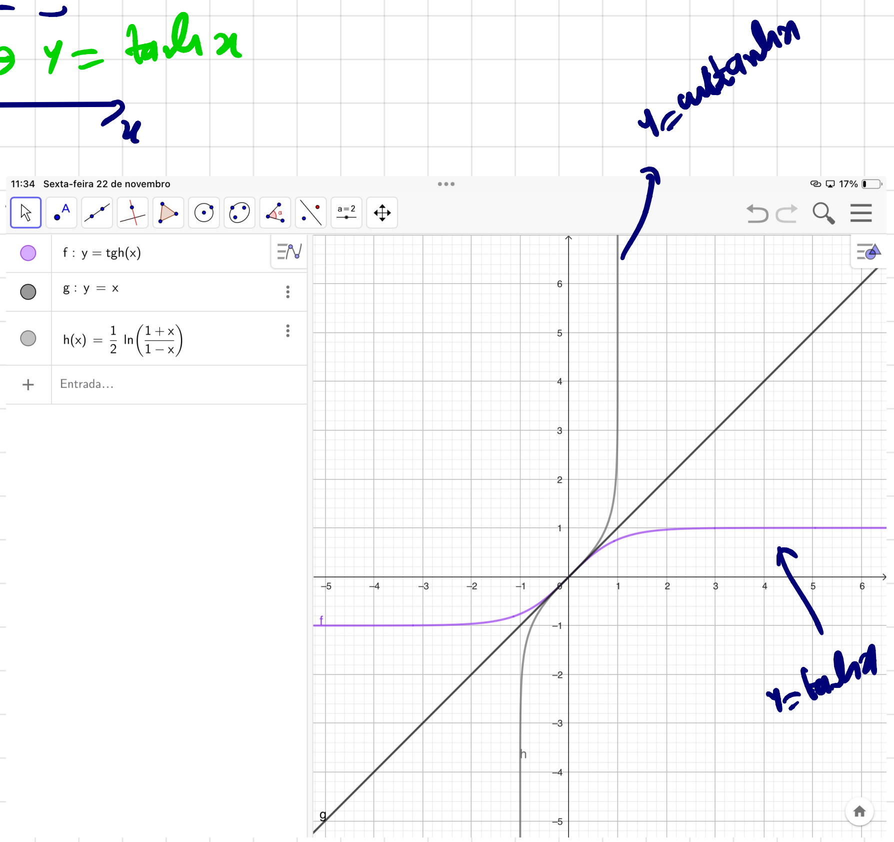
$$x = f^{-1}(y) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$$

$$\parallel$$

$$\operatorname{arctanh}(y)$$

gráfico: Novamente, pelo espelhamento de $y = \tanh x$ sobre $y = x$:





Do mesmo modo podemos fazer para definir $y = \text{arc sech } x$ e $y = \text{arc csch } x$. Fica como exercício.