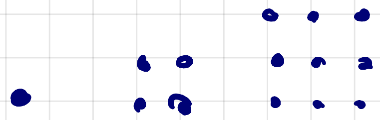
ARITMÉTICA

27/11/24 — AULA 03

No final da aula passada iniciamos a discussão sobre números figurados.

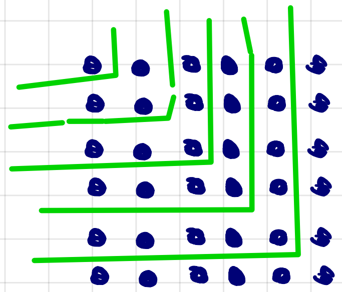
Vimos o conceito de números quadrados.



$1 \quad 4 \quad 9 \quad \dots \quad n^2$

$Q_1 \quad Q_2 \quad Q_3 \quad \dots \quad Q_n$

Outra propriedade interessante sobre números quadrados é observar que:



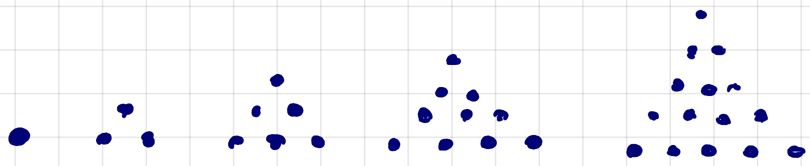
$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \dots + (2n-1) = Q_n = n^2$$

Ex: $5^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9$

$\hookrightarrow 9 = 2 \cdot \underset{n}{5} - 1$

Outros números figurados:

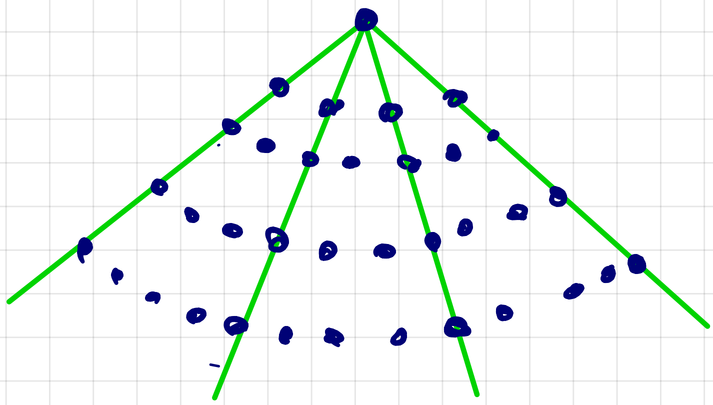
- NÚMEROS TRIANGULARES:



1   3   5   10   15   ... T_n

T_1 T_2 T_3 T_4 T_5 ... $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$

- NÚMEROS PENTAGONAIS:



INICIAVAM COM 5 PONTOS MARCADOS, FORMANDO 5 LINHAS (TEIAS). EM CADA FILEIRA IAM ACRESENTANDO MAIS 1, depois 2 pontos, etc.

$P_1 = 1$

$P_2 = 5$

$P_3 = 12$

$P_4 = 22$

$P_5 = 35$

$\vdots$

$P_2 = 1 + 4$

$P_3 = 1 + 4 + 4 + 3$

$P_4 = 1 + 4 + 4 + 3 + {}$
$+ 4 + 3.(2)$

$P_5 = 1 + 4 + 4 + 3 + {}$
$+ 4 + 3.(2) + {}$
$4 + 3.(3)$

$$P_n = 1 + (n-1)\cdot 4 + 3\cdot\left(1 + 2 + \dots + (n-2)\right)$$

$$P_n = 1 + 4n - 4 + 3\,\frac{(1+(n-2))\cdot(n-2)}{2}$$

$$P_n = 4n - 3 + 3\cdot\frac{(n-1)\cdot(n-2)}{2}$$

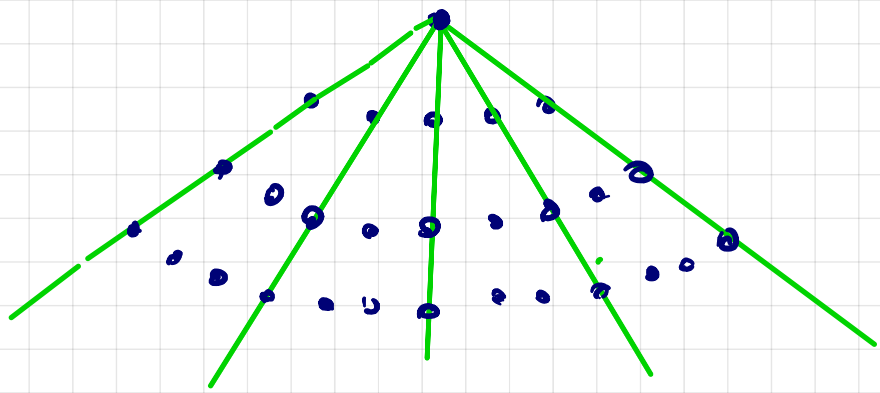
$$P_n = \frac{8n - \cancel{6} + 3n^2 - 9n + \cancel{6}}{2}$$

$$P_n = \frac{3n^2 - n}{2} = \frac{n(3n-1)}{2}$$

Ex: $P_5 = \dfrac{5\cdot(3\cdot 5 - 1)}{2} = 35$

• NÚMEROS HEXAGONAIS:

De forma similar à construção dos números pentagonais, pode-se construir os números hexagonais:



$H_1 = 1$

$H_2 = 6$

$H_3 = 15$

$\vdots$

<u>EXERCÍCIO</u>: Deduza uma fórmula para os números hexagonais.

(entregar dia 04/12)

<u>TERNOS PITAGÓRICOS</u>: Outro problema que os pitagóricos trabalharam foi em determinar números naturais que verificassem o T. de Pitágoras: $a^2 = b^2 + c^2$.

Este mesmo problema foi tratado muito tempo depois, no séc. III D.C., por DIOFANTO.

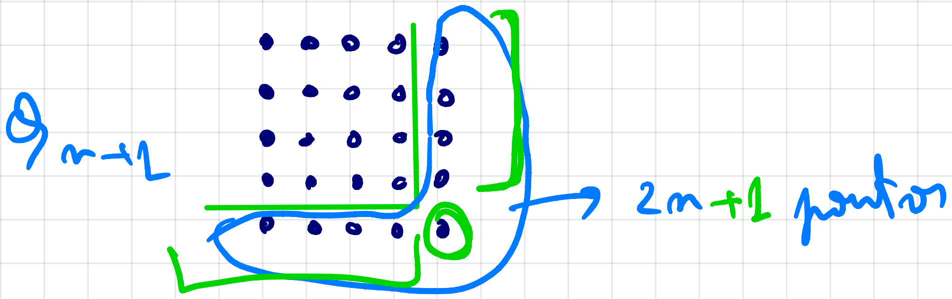
Por exemplo $(3, 4, 5)$ é um terno pitagórico bem conhecido, pois:

$$(5)^2 = (3)^2 + (4)^2$$

$$25 = 9 + 16$$

Eles usaram meios geométricos para encontrar ternos pitagóricos.

Por exemplo, poderiam ter observado o seguinte, olhando números quadrados,



Escrevendo $2n+1 = m^2$,

encontraríamos $2n = m^2 - 1$

$$\Rightarrow n = \frac{m^2-1}{2}.$$

E, como

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$$

$$\left(\frac{m^2-1}{2}+1\right)^2 = \left(\frac{m^2-1}{2}\right)^2 + m^2$$

$$\left(\frac{m^2-1+2}{2}\right)^2 = \left(\frac{m^2-1}{2}\right)^2 + m^2$$

$$\left(\frac{m^2+1}{2}\right)^2 = \left(\frac{m^2-1}{2}\right)^2 + m^2$$

Esta igualdade, tomando valores ímpares para m, encontramos ternos pitagóricos.

Ex.:

$$m = 5 \cdot \begin{cases} \bullet \ \dfrac{m^2+1}{2} = \dfrac{25+1}{2} = 13 \\ \bullet \ \dfrac{m^2-1}{2} = \dfrac{25-1}{2} = 12 \\ \bullet \ m \ 5 \ . \end{cases}$$

Então: $(5, 12, 13)$ é um terno pitagórico:

$$(13)^2 = (12)^2 + 5^2$$

$$169 = 144 + 25 \qquad \checkmark$$