

Fundação Universidade Federal de Pelotas  
Departamento de Matemática e Estatística  
Cursos 3900, 3910, 6100 e 6400  
Prova Optativa de Cálculo 1  
Prof. Dr. Maurício Zahn

Nome:

Data: 05/09/2024

**Instrução.** Todas as questões devem ser feitas. A nota será dada por:

$$\text{Nota} = \frac{2}{3} \times \text{número de acertos.}$$

**Questão 01.** Defina  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ , respectivamente, por

$$f(x) = \frac{2x + 1}{2x + 3} \quad \text{e} \quad g(x) = \frac{x^3 + 2x - 3}{x^2 - 1}.$$

- (a) [0,5 pt] Determine os domínios de  $f$  e de  $g$ .
- (b) [1,0 pt] Encontre os valores de  $x \in \mathbb{R}$  tais que  $|f(x)| \leq 1$ .
- (c) [1,0 pt] Calcule  $\lim_{x \rightarrow -\frac{3}{2}} f(x)$  e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ , se existirem.
- (d) [1,0 pt] Calcule  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)]^{g(x)}$ .
- (e) [0,5 pt] Obtenha a equação da reta tangente ao gráfico de  $f$  em  $x = 1$ .

**Questão 02.** Considere a função cuja lei é dada por  $f(x) = 1 + 2 \log_2(1 - x)$ .

- (a) [1,0 pt] Esboce seu gráfico, indicando domínio e imagem.
- (b) [1,0 pt] Conclua que  $f$  é contínua no seu domínio. Em seguida, usando o Teorema do Valor Intermediário, mostre que  $f$  possui uma raiz no intervalo  $[0, \frac{1}{2}]$ .

**Questão 03.** [0,5 pt cada item] Usando as técnicas estudadas em aula, calcule cada limite a seguir.

(a)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - x - 3x^2 - 4x^3}{x^4 - 3x^3 + x - 2}$       (b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } 3x - \text{sen } 7x}{4x}$       (c)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 - 2x - 1} - \sqrt{x - 1}}{x^2 - 3x}$

**Questão 04.** [0,5 pt cada item] Calcule a derivada  $f'(x)$  de cada função abaixo:

(a)  $f(x) = \ln \text{sen}(x - x^2)$       (b)  $f(x) = \frac{\sqrt{x} - x}{\sqrt{x} + x}$       (c)  $f(x) = \arctan\left(\frac{x + 1}{x}\right)$

**Questão 05.** [1,0 pt] Calcule a derivada  $y'$  da função  $f$  definida implicitamente por

$$\ln(x + y) - e^{x-y} = xy^2.$$

**Questão 06.** [1,0 pt] Use diferenciais para determinar o valor aproximado de  $\sqrt[3]{62}$ .

**Questão 07.** Seja  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = x(x - 2)^{\frac{2}{3}}$ .

- (a) [0,5 pt] Determine o domínio de  $f$  e os seus zeros, se houverem.
- (b) [0,5 pt] Verifique se  $f$  é contínua em  $x = 2$ .
- (c) [0,5 pt] Verifique se  $f$  é derivável em  $x = 2$ .
- (d) [1,0 pt] Determine os intervalos onde  $f$  é crescente e onde  $f$  é decrescente, determinando pontos de máximo e mínimo locais, se existirem.
- (e) [1,0 pt] Encontre os intervalos onde o gráfico de  $f$  é côncavo para cima e onde é côncavo para baixo, determinando pontos de inflexão, se existirem.
- (f) [0,5 pt] Com auxílio dos resultados obtidos nos itens acima, esboce o gráfico de  $f$ .

**Questão 08.** Uma escada com 13 m está em pé e apoiada em uma parede de uma casa, quando a sua base começa a escorregar, afastando-se da parede. No momento em que a base está a 12 m da casa, ela escorrega a uma taxa de 5 m/s.

- (a) [1,0 pt] A que taxa o topo da escada escorrega para baixo nesse momento?
- (b) [1,0 pt] A que taxa a área do triângulo, formado pela escada, pela parede e pelo solo, varia?