Fundação Universidade Federal de Pelotas
Cursos 3900, 3910, 6100 e 6400
Disciplina de Cálculo 1 - Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 09 de Exercícios - Problemas de Máximos e mínimos

1. Encontre todos os pontos críticos de cada função a seguir.

   (a) $f(x) = x^2 - 2x + 4$ (b) $f(x) = 8x^3 - x^2$ (c) $f(x) = 4x - \sqrt{x^2+1}$

   (d) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ (e) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ (f) $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$

2. Um fabricante pretende construir uma caixa retangular a partir de uma lâmina de 8cm×5cm, cortando um quadrado de cada um de seus cantos. Ache o lado desse quadrado para que o volume da caixa a ser construída seja máximo. (Resp. 1cm).

3. Um pedaço de arame com 10 m de comprimento é cortado em duas partes. Uma delas é curvada na forma circular e a outra, na forma de um quadrado. Como dividir o fio de tal modo que a área combinada das duas figuras seja a menor possível?
   (Resp. raio da circunferência: $\frac{5}{\pi+4}$ m; lado do quadrado: $\frac{10}{\pi+4}$m).

4. Um fazendeiro dispõe de 600 m de material para cercar um pasto retangular adjacente a um muro já existente. Ele planeja construir uma cerca paralela ao muro, duas cercas formando as extremidades laterais e uma quarta cerca (paralela às duas últimas) para dividir o cercado em duas partes iguais. Qual é a área máxima que pode ser cercada?

5. Ache o raio e a altura de um cilindro circular reto com o maior volume, o qual pode ser inscrito em um cone circular reto com 10 cm de altura e 6 cm de raio.

6. Se 1200 cm^2 de material estiverem disponíveis para fazer uma caixa com base quadrada e sem tampa, encontre o maior volume possível para fazer tal caixa (considere o material sendo um quadrado de área 1200 cm^2).
   (Resp. altura da caixa: $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ cm; lado: $\frac{40\sqrt{3}}{3}$ cm).

7. Encontre a área do maior retângulo que pode ser inscrito em um triângulo retângulo com catetos de comprimentos 3 cm e 4 cm, se dois lados do retângulo estiveres sobre os catetos.
   (Resp. A área máxima será 3 cm^2).

8. A taxa (em mg de carbono/m^3/h) na qual a fotossíntese ocorre para uma espécie de fitoplâncton é modelada pela função

$$p = \frac{100I}{I^2 + I + 4}$$

   onde I é a intensidade de luz (medida em milhares de velas). Para qual intensidade de luz p é máximo? (Resp. $I = 2$).

9. Encontre o número positivo tal que a soma dele com o seu inverso seja tão pequena quanto possível.

10. Numa dada comunidade, uma certa epidemia alastra-se de tal forma que x meses após o seu início, $P\%$ da população estará infectada, onde

$$P = \frac{30x^2}{(1+x^2)^2}.$$

Em quantos meses o número de infectados atingirá o máximo e que porcentagem da população esse número representa? (Resp. 1 mês, $P = 7,5\%$).

11. Se uma lata fechada com volume 16π cm^3 deve ter a forma de uma cilindro circular reto, ache a altura e o raio, se um mínimo de material deve ser usado em sua fabricação.
(Resp. $R = 2$ cm e $h = 4$ cm).

12. Calcular o volume máximo do cilíndro circular reto que pode ser inscrito em um cone de 12cm de altura e 4cm de raio da base, de modo que os eixos do cilindro e do cone coincidam.
(Resp. $R = \frac{8}{3}$cm e $h = 4$cm, e portanto $V = \frac{256\pi}{9}$cm^3).

13. Faça um estudo completo de cada função abaixo, determinando domínio, zeros, assíntotas (se existirem), pontos críticos, intervalos de crescimento e decrescimento, pontos de máximos e mínimos, concavidades e pontos de inflexão.

(a) $f(x) = x^4 - 2x^3$
(b) $f(x) = x^3 + 5x^2 + 3x - 4$
(c) $f(x) = \dfrac{2-x}{x-3}$
(d) $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2+1}$
(e) $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$
(f) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^3-1}$
(g) $f(x) = (1-x)x^{\frac{1}{5}}$
(h) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$
(i) $f(x) = \ln\left(x + \dfrac{1}{x}\right)$
(j) $f(x) = 2 + (x-3)^{\frac{1}{3}}$
(k) $f(x) = 2\tan\frac{x}{2}$; $x \in (-\pi, \pi)$
(ℓ) $f(x) = x\sqrt{9-x^2}$
(m) $f(x) = (x+1)^{\frac{2}{3}}(x-2)^{\frac{1}{3}}$
(n) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2-9}$