Fundação Universidade Federal de Pelotas
Cursos 3900, 3910, 6100 e 6400
Disciplina de Cálculo 1 - Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 07 de Exercícios - Regras de derivação. Derivação implícita. Diferenciais

1. **Definição.** Chama-se *reta normal* ao gráfico de uma função f em um ponto $P(x_0, f(x_0))$ a reta perpendicular à reta tangente a f em P, passando por este ponto.

   Por exemplo, sabemos que a reta tangente ao gráfico de $f(x) = x^2$ em $x_0 = 0$ é o eixo horizontal ox, e então a reta normal ao gráfico de $f(x) = x^2$ no mesmo ponto $x_0 = 0$ será o eixo vertical oy.

   Com base na definição acima, determine em cada item abaixo a equação das retas tangente e normal ao gráfico de f no ponto indicado.

   (a) $f(x) = (2x^2 - 3x)^3$, em $x = 2$. (b) $f(x) = \ln(2x - 1)$, em $x = 1$.

   (c) $f(x) = \dfrac{3 - 2x}{x + 2}$, em $x = 1$. (d) $f(x) = \operatorname{sen}((3x-1)\pi) + \sqrt{x + 1}$, em $x = 3$.

2. Verifique se a função $f(x) = x|1 - x^2|$ é derivável no ponto $x = 1$.

3. Calcule a derivada de cada função abaixo:

   (a) $y = 6x^{\frac{7}{2}} + 4x^{\frac{5}{2}} + 2x$ (b) $y = \sqrt{3x} + \sqrt[3]{x} + \dfrac{2}{x}$

   (c) $y = \dfrac{(x + 1)^3}{x^{\frac{3}{2}}}$ (d) $y = (2x - 1)(x^2 - 6x + 3)$

   (e) $y = \dfrac{1}{2}\tan^2 x$ (f) $y = \ln\cos(x)$

   (g) $y = \dfrac{\tan x - 1}{\sec x}$ (h) $y = e^{x\cos x}$

4. Calcule a derivada de cada função abaixo:

   (a) $f(x) = (3x^2 - 5x^3)^2$ (b) $f(x) = \dfrac{3x - 4}{5x^2 - x + 1}$

   (c) $f(x) = \sqrt{3x^2 - 4x + 2}$ (d) $f(x) = \ln(4x^3 - 2x^2)$

   (e) $f(x) = (1 - 2x^2 - x^3) \cdot \ln(x^3 - x - 1)$ (f) $f(x) = \ln\dfrac{3 - 2x}{x + 1}$

   (g) $f(x) = e^{3x^2-1}$ (h) $f(x) = e^{2x} \cdot \ln(2 - 3x)$

   (i) $f(x) = \operatorname{sen}(3x - 2) \cdot \ln(x - 1)$ (j) $f(x) = \tan(\ln(1 - 2x)) + \sqrt{x}$

5. Sendo $1 \neq a > 0$ e $v = v(x)$, prove a seguinte regra de derivação:

   $$y = a^v \Rightarrow y' = a^v \cdot \ln a \cdot v'.$$

   Se $a = e$, onde e é o número de Euler, o que obtemos?

   Sugestão: de $y = a^v$, aplique propriedades dos logaritmos usando o logaritmo natural.

6. Prove a seguinte regra de derivação:

   $$y = x^x \Rightarrow y' = (1 + \ln x)x^x.$$

7. Calcule a derivada de cada função abaixo:

   (a) $f(x) = \sqrt[5]{\dfrac{x-1}{x+2}}$ (b) $f(x) = \ln \dfrac{\cos x}{\sqrt{4-3x^2}}$ (c) $f(x) = \csc \dfrac{1-\sqrt{x}}{\ln(1-x)}$

   (d) $f(x) = e^{\sqrt{\tan(2x^{-2}+x)}}$ (e) $f(x) = \sqrt{x \cdot \operatorname{sen}(1-x)}$ (f) $f(x) = \sqrt{x} \cdot \tan e^{\sqrt{x}}$

8. Usando as regras de derivação estudadas em aula, calcule a derivada de cada função abaixo, simplificando a resposta ao máximo.

   (a) $y = \dfrac{1}{4} \ln \dfrac{x}{x-4} + 3$ (b) $y = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \ln \dfrac{2x+3-\sqrt{5}}{2x+3+\sqrt{5}}$

   (c) $y = \dfrac{x}{4}\sqrt{x^2-4} - \ln(x + \sqrt{x^2-4})$ (d) $y = \dfrac{x}{2}\sqrt{25-9x^2} + \dfrac{25}{6} \operatorname{arcsen} \dfrac{3x}{5}$

9. Calcule a derivada de cada função implícita abaixo.

   (a) $y^3 - 3y + 2ax = 0$ (b) $\cos(xy) = x$ (c) $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}$

   (d) $y = \cos(x+y)$ (e) $\sqrt{xy} + 2y = \sqrt{x}$ (f) $\ln(x^2+y^2) - 3x^2y^3 = \sqrt{x+y}$

10. Ache a equação da reta tangente à curva de equação $x^3 + y^3 = 2xy + 5$ em $P(2,1)$.

11. Encontre a equação da reta tangente à curva de equação $y = \dfrac{2x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$ em $P(3,3)$.

12. Mostre que a tangente à curva $\left(\dfrac{x}{a}\right)^n + \left(\dfrac{y}{b}\right)^n = 2$ no ponto $P(a,b)$ é dada pela equação $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 2$.

13. O *folium de Descartes* é o gráfico da equação $x^3 + y^3 = 3xy$. Esta curva foi proposta inicialmente René Descartes como um desafio a Pierre de Fermat(1601-1665) para achar sua reta tangente em um ponto arbitrário. Ache a equação da reta tangente ao folium no ponto $A(\frac{2}{3}, \frac{4}{3})$.

14. (**Conc. Docente IF-Sul Pelotas 2008**) A equação da reta tangente, y como função de x, à curva $x^2 = \dfrac{x+2y}{x-2y}$ no ponto $P(1,0)$ é

    (a) $x + 2y - 1 = 0.$ (b) $x - 2y - 1 = 0.$

    (c) $x - 4y + 1 = 0.$ (d) $x + 4y - 1 = 0.$

15. Use diferenciais para achar um valor aproximado de cada uma dos seguintes números:

    (a) $\sqrt{66}$ (b) $\sqrt[3]{120}$ (c) $\sqrt[4]{15}$

16. Dados $\operatorname{sen} 60° = 0,86603$, $\cos 60° = 0,5$ e $1° = 0,01745$ rad, use diferenciais para o cálculo aproximado de cada número trigonométrico abaixo, com quatro decimais:

    (a) $\operatorname{sen} 62°$ (b) $\cos 61°$ (c) $\operatorname{sen} 59°$ (d) $\cos 58°$

17. Uma queimadura na pele de uma pessoa te a forma de um círculo, tal que se r cm for o raio e A cm^2 for a ára da queimadura, então $A = \pi r^2$. Use diferencial para encontrar o decréscimo aproximado da área da quimadura quando o raio passa de 1 para 0,8 cm.

18. A medida da aresta de um cubo é 15 cm, com um erro possível de 0,01cm. Use diferenciais para encontrar o erro aproximado no cálculo do volume.