Fundação Universidade Federal de Pelotas
Cursos 3900, 3910, 6100 e 6400
Disciplina de Cálculo 1 - Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 06 de Exercícios - Derivadas (primeiros resultados)

1. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função dada por $f(x) = x^2$. Determine $f'(a)$, onde $a \in \mathbb{R}$.

2. Em cada item a seguir, usando a definição de derivada, obtenha a função derivada f' e obtenha a equação da reta tangente no ponto x_0 indicado.

   (a) $f(x) = x^2 - 3x - 1$; $x_0 = 2$.
   (b) $f(x) = \sqrt{3 - 2x}$; $x_0 = 1$.
   (c) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$; $x_0 = 4$
   (d) $f(x) = \ln(1 - x)$; $x_0 = 0$.

3. Calcule a derivada de cada função abaixo, usando a definição de derivada:

   (a) $f(x) = 3x^2 - 4x + 2$
   (b) $f(x) = \sqrt{3 - 4x}$
   (c) $f(x) = \operatorname{sen}(2x - 3)$
   (d) $f(x) = \ln(3 - 2x)$
   (e) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x - 2}}$
   (f) $f(x) = \ln \dfrac{2}{x - 1}$

4. Prove que se $f(x)$ é derivável em $x = a$, então

$$\lim_{x \to a} \frac{xf(a) - af(x)}{x - a} = f(a) - af'(a).$$

5. Sejam $f, g, h : I \to \mathbb{R}$ tais que, para todo $x \in I$ se tenha $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$. Se num ponto[1] $a \in I \cap I'$ tem-se $f(a) = h(a)$ e existirem $f'(a) = h'(a)$, mostre que existe $g'(a)$ e tem o mesmo valor.
   Obs. Podemos dizer que este resultado é o "Teorema do sanduíche para derivadas".

6. Seja f a função real definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

   Use a definição de derivada para mostrar que existe $f'(0)$, mas que $f'(0) \neq \lim_{x \to 0} f'(x)$. (ou seja, a função derivada f' não é contínua em $x = 0$).

7. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x \text{ racional} \\ 0, & \text{se } x \text{ irracional} \end{cases}.$$

   Prove que f é derivável em $x = 0$.

8. Suponha que um corredor em uma corrida de 100 metros está a s metros da linha de chegada t segundos depois do início da corrida, onde

$$s = 100 - \frac{1}{4}(t^2 + 33t).$$

   Determine a velocidade do corredor:

[1] Dizer que $a \in I \cap I'$ significa que a é um ponto do intervalo I que é também um ponto de acumulação de I.

(a) no início da corrida;

(b) quando o corredor cruza a linha de chegada.

9. Uma jamanta pega uma pista de saída de uma rodovia em $t = 0$. Sua posição depois de t segundos é dada por $s(t) = 84t - t^3$ metros, para $0 \leq t \leq 5$.

   (a) Qual é a velocidade da jamanta no momento em que pega a pista de saída?

   (b) Qual a sua aceleração em $t = 4s$?

10. Uma partícula move-se ao longo de uma reta segundo a equação $s(t) = 5 - \cos^2 t$, onde s cm é a distância orientada da partícula até a origem em t s. Se v cm/s e a cm/s^2 forem, respectivamente, a velocidade e a aceleração da partícula em t s, ache v e a em termos de s.

11. Uma partícula move-se ao longo de uma reta obedecendo à lei

$$s(t) = \operatorname{sen}(4t + \frac{\pi}{3}) + \operatorname{sen}(4t + \frac{\pi}{6}),$$

onde s é expresso em metros e t em segundos. Qual a aceleração da partícula no instante de tempo $t = 4$ segundos?

12. A lei do movimento de um objeto é dada por $s(t) = t - \ln(t^2 + 1)$, onde s é dado em metros e t em segundos. Determine a aceleração do objeto no instante em que o mesmo entrar em repouso.

13. Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x|$. Calcule as derivadas laterais $f'_-(0)$ e $f'_+(0)$. O que concluímos sobre a existência de $f'(0)$? O que isso significa geometricamente?

14. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x|x - 1|^{\frac{1}{3}}$.

    (a) Mostre que f é contínua em $x = 1$.

    (b) Verifique se f é derivável em $x = 1$.

    (c) Calcular $f'(x)$.

    (d) Encontre a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto onde $x = 2$.

15. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = (x + 1)|x + 1|.$$

   (a) Essa função é derivável em todos os pontos?

   (b) Calcule $f'(x)$ e faça um esboço gráfico da função derivada.