Fundação Universidade Federal de Pelotas
Cursos 3900, 3910, 6100 e 6400
Disciplina de Cálculo I - Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 05 de Exercícios - Funções contínuas

1. Verifique se cada função abaixo é contínua ou não em cada ponto indicado:

   (a) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2}, & \text{se } x < 2 \\ x^2 - 3x + 6, & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$ no ponto $x = 2$.

   (b) $f(x) = \begin{cases} \frac{|x-3|}{x-3}, & \text{se } x \neq 3 \\ 1, & \text{se } x = 3 \end{cases}$ no ponto $x = 3$.

   (c) $f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos 2x}{x^2}, & \text{se } x < 0 \\ x + 2, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$ no ponto $x = 0$.

   (d) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2x-1}-3}{x^2-5x}, & \text{se } x \neq 5 \\ 4, & \text{se } x = 5 \end{cases}$ no ponto $x = 5$.

2. Determine o valor de $m \in \mathbb{R}$ tal que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x-3}, & \text{se } x < 3 \\ mx + 1, & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$$

   seja contínua em $x = 3$.

3. Mostre que a função real definida por

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \operatorname{sen} \frac{1}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

   é contínua em $x = 0$.

4. Mostre que a função $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sqrt{x}$ é contínua.

5. Mostre que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{sen} x$ é uma função contínua.

6. Observando os dois exercícios acima, conclua que $f(x) = \operatorname{sen} \sqrt{x}$ é contínua em todo o seu domínio.

7. Prove que $f(x) = x - x^2$ é uma função contínua em toda a reta.

8. Dada a função real de variável real $f(x) = 4 + 3x - x^2$. Use o Teorema do Valor intermediário para mostrar que existe um $c \in [2, 5]$ tal que $f(c) = 1$. Determine também o valor de $f(c)$.

9. Use o Teorema do valor intermediário para mostrar que $f(x) = 3x^5 - 5x^4 - 3x - 1$ possui uma raiz real no intervalo $[1, 2]$. Idem para o intervalo $[-1, -\frac{1}{2}]$.

10. Mostre que o Teorema do valor intermediário garante que a equação $x^3 + x + 3 = 0$ tenha uma raiz entre -2 e -1.

11. Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funções contínuas em $[a, b]$, tais que $f(a) \geq g(a)$ e $f(b) \leq g(b)$. Prove que existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = g(c)$.