Fundação Universidade Federal de Pelotas
Departamento de Matemática e Estatística
Cursos de Física e Química
Terceira Prova de Cálculo 3
Prof. Dr. Maurício Zahn

Nome: **Data:** 30/08/2024

Questão 01. [Peso 1.0 cada] Calcule cada integral múltipla abaixo:

(a) $\int_0^3 \int_{x^2}^9 x^3 e^{y^3} dydx$ (b) $\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x-y} dxdy$ (c) $\int_0^1 \int_x^{2x} \int_0^y 2xyz \, dzdydx$

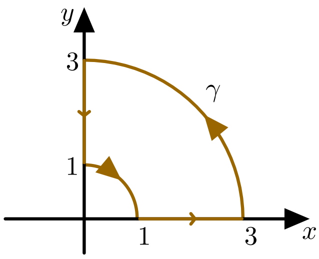
Questão 02. [Peso 1.0] Calcule $\iint_\Omega \arctan \frac{y}{x} \, dydx$, onde Ω é a região dada por

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9, \, y \geq 0\}.$$

Questão 03. [Peso 1.0] Use integral tripla para determinar o volume do sólido limitado pelo cilindro $y = x^2$ e pelos planos $z = 0$ e $y + z = 1$.

Questão 04. [Peso 1.5] Calcule $\iint_\Omega \sqrt{2x + 3y} \cos(x - y) dxdy$, onde Ω é a região do plano xy definida pelo quadrilátero $ABCD$ de vértices nos pontos $A(\frac{3}{5}, -\frac{2}{5})$, $B(\frac{6}{5}, -\frac{4}{5})$, $C(\frac{9}{5}, -\frac{1}{5})$ e $D(\frac{6}{5}, \frac{1}{5})$.

Questão 05. Considere o campo vetorial $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $\vec{F}(x, y) = (xy, x+y)$, e seja γ o caminho fechado conforme o esquema abaixo, onde temos dois arcos de circunferências.



Calcule a integral de linha $\oint_\gamma \vec{F} d\vec{r}$ de duas formas:

(a) [Peso 1.0] mediante parametrizações;

(b) [Peso 1.0] via o Teorema de Green.

Questão 06. [Peso 1.5] Use o Teorema da Divergência para mostrar que, dado um campo escalar $g : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ com derivadas parciais contínuas até a segunda ordem no aberto Ω e γ uma curva suave fechada simples em Ω, então

$$\oint_\gamma g \frac{\partial g}{\partial \vec{n}} ds = \iint_D (g \Delta g + ||\nabla g||^2) dA,$$

onde D é a região interior à γ. Usando a identidade acima, calcule $\oint_\gamma g \frac{\partial g}{\partial \vec{n}} ds$ quando $g(x, y) = x^2 + y^2$ e γ é a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 1$.

Questão 07. [Peso 1.0] Determine a divergência e o rotacional do campo $\vec{F}(x, y, z) = (x^2 z^2, 2xy, y^2 - z^2)$.