Fundação Universidade Federal de Pelotas
Cursos de Física e Química
Disciplina de Cálculo 3 - Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 09 de Exercícios - Integrais duplas em coorenadas polares, mudança geral de coordenadas e impróprias

1. Use coordenadas polares para calcular cada integral a seguir.

   (a) $\displaystyle\iint_{x^2+y^2\leq r^2} e^{-x^2-y^2}dxdy$ (b) $\displaystyle\iint_{x^2+y^2\leq 1} \frac{dxdy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$ (c) $\displaystyle\iint_{x^2+y^2\leq r^2} x^2e^{-(x^2+y^2)^2}dxdy$

2. Passe para coordenadas polares e calcule $\displaystyle\int_{-1}^{0}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{0} \frac{2}{1+\sqrt{x^2+y^2}}dydx$.

3. Calcule $\displaystyle\iint_{\Omega}(x+y)dxdy$, onde Ω é a região que está à esquerda do eixo y e entre as circunferências $x^2+y^2=1$ e $x^2+y^2=4$.

4. Passe para coordenadas polares e calcule $\displaystyle\int_{-1}^{0}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{0} \frac{2}{1+\sqrt{x^2+y^2}}dydx$.

5. Calcule $\displaystyle\iint_{\Omega}\cos(x^2+y^2)dxdy$, onde Ω é a região acima do eixo x e dentro da circunferência $x^2+y^2=9$.

6. Calcule $\displaystyle\iint_{\Omega}\arctan\frac{y}{x}dA$, onde Ω é a região do primeiro quadrante compreendida entre dois círculos $x^2+y^2=4$ e $x^2+y^2=2x$.

7. Calcule $\iint_{\Omega} x^2dxdy$, onde $\Omega=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,:\, x^2+4y^2\leq 1\}$. (Resp.: $\frac{\pi}{8}$).

8. Calcule as seguintes integrais, efetuando uma mudança de coordenadas convenienete em cada caso.

   (a) $\displaystyle\iint_{\Omega}\frac{(x+y)^7}{y-x}dxdy$, onde Ω é a região limitada pelas retas $y-x=3$, $y-x=1$, $y+x=3$ e $y+x=4$. (Resp.: $(\frac{4^8}{8}-\frac{3^8}{8})\frac{\ln 3}{2})$

   (b) $\displaystyle\iint_{\Omega}(x-y)^2\sin(x+y)dxdy$, onde Ω é o paralelogramo de vértices em $(\pi,0)$, $(2\pi,\pi)$, $(\pi,2\pi)$ e $(0,\pi)$.

9. Calcule a integral dupla
$$\iint_{\Omega}\sqrt{x+y}\,\ln(x-3y)dxdy,$$
onde Ω é o quadrilátero $ABCD$ de vértices $A(\frac{7}{4},\frac{1}{4})$, $B(\frac{9}{4},-\frac{1}{4})$, $C(\frac{3}{2},-\frac{1}{2})$ e $D(1,0)$.

10. Calcule $\displaystyle\iint_{\Omega}\frac{\cos(x-y)}{\sin(x+y)}dxdy$, onde Ω é o trapézio formado por $1\leq x+y\leq 2$, $x\geq 0$ e $y\geq 0$.

11. Calcule $\displaystyle\iint_{\Omega}\cos\left(\frac{y-x}{y+x}\right)$, onde Ω é a região trapezoidal com vértices em $A(1,0)$, $B(2,0)$, $C(0,2)$ e $D(0,1)$.

12. Calcule a integral $\displaystyle\iint_{\Omega} (x+y)^2 \sin^2(x-y)\,dxdy$, onde $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq \pi\}$.

13. Calcule as integrais impróprias abaixo.

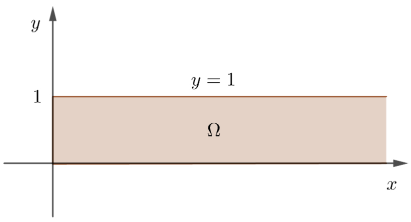
(a) $\displaystyle\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-x-y}\,dxdy$

(b) $\displaystyle\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} x^2 e^{-x^2-y^2}\,dxdy$

(c) $\displaystyle\iint_{x^2+y^2\leq 1} \frac{x^2\,dxdy}{(x^2+y^2)^{\frac{7}{4}}}$

(d) $\displaystyle\iint_{x^2+y^2\leq 1} \ln\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$

14. Seja Ω a semi-faixa infinita dada pela ilustração abaixo.



Determine $\iint_{\Omega} f$, sendo $f(x,y) = y^{-\frac{1}{2}} e^{-x}$.

15. Calcule $\displaystyle\iint_{\Omega} e^{\frac{x-y}{x+y}}\,dxdy$, onde Ω é o triângulo delimitado pelos eixos $x=0$, $y=0$ e pela reta $x+y=1$.