**Fundação Universidade Federal de Pelotas**
**Cursos de Física e Química**
**Disciplina de Cálculo 3 - Prof. Dr. Maurício Zahn**
**Lista 11 de Exercícios - Integrais de Linha. Teoremas de Green, da divergência e de Stokes**

1. Calcule a integral de linha de cada campo vetorial $\vec{F}$ dado, ao logo da curva orientada indicada em cada item:

   (a) $\vec{F}(x,y) = (x^2, xy)$, ao longo do segmento de reta de $(0,0)$ a $(2,2)$.

   (b) $\vec{F}(x,y) = (4, y)$, no quarto de círculo $x^2+y^2 = 1$ com $x, y \leq 0$, e orientação anti-horária.

   (c) $\vec{F}(\frac{1}{y^3+1}, \frac{1}{z+1}, 1)$, $\gamma(t) = (t^3, 2t, t^2)$, com $0 \leq t \leq 1$.

2. Calcule $\int_\gamma \vec{F} d\vec{r}$, sendo $\vec{F}(x,y) = 9x^2y\vec{i} + (5x^2 - y)\vec{j}$, onde $\gamma$ é a curva $y = x^3 + 1$, de $(1,2)$ a $(3,28)$.

3. Mostre que a integral $\int_\gamma (\ln x + 2y)dx + (e^y + 2x)dy$ é independente do caminho. Depois, calcule esta integral sendo $\gamma$ uma curva do ponto $A(3,1)$ ao ponto $B(1,3)$.

4. Mostre que a integral $\int_\gamma (\operatorname{sen} y \operatorname{senh} x + \cos y \cosh x)dx + (\cos y \cosh x - \operatorname{sen} y \operatorname{senh} x)dy$ é independente do caminho. Em seguida, calcule esta integral do ponto $A(1,0)$ ao ponto $B(2,\pi)$.

5. Calcule $\int_C \vec{F} d\vec{r}$, onde $\vec{F}(x,y,z) = (e^x + e^{z^2})\vec{i} + (e^y + z)\vec{j} + (2xze^{z^2} + y)\vec{k}$, ao longo de qualquer caminho do ponto $A(1,1,0)$ ao ponto $B(1,2,-1)$. Por quê por qualquer caminho serve?

6. Determine as seguintes integrais ao longo dos caminhos fechados:

   (a) $\displaystyle\oint_\gamma (2xy + 4)dx + (x^2 + z^2)dy + 2zydz$, onde $\gamma(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t, t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

   (b) $\displaystyle\oint_\gamma (xy + z)dx + (x - y)dy + 4zdz$, onde $\gamma(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t, t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

7. Calcule a integral de linha em cada item a seguir de duas formas: (i) diretamente, através de parametrizações; (ii) usando o teorema de Green.

   (a) $\oint_\gamma xy^2dx + x^3dy$, onde $\gamma$ é o retângulo com vértices em $(0,0)$, $(2,0)$, $(2,3)$ e $(0,3)$.

   (b) $\oint_\gamma ydx - xdy$, onde $\gamma$ é o circunferência unitária com centro na origem.

8. Use o teorema de Green para calcular cada integral de linha a seguir, ao longo da curva dada com orientação positiva.

   (a) $\int_\gamma e^y dx + 2xe^y dy$, onde $\gamma$ é o quadrado de lados $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ e $y = 1$.

   (b) $\int_\gamma (ye^{\sqrt{x}})dx + (2x + \cos y^2)dy$, onde $\gamma$ é a fronteira da região delimitada pelas parábolas $y = x^2$ e $x = y^2$

   (c) $\int_\gamma xe^{-2x}dx + (x^4 + 2x^2y^2)dy$, onde $\gamma$ é a região entre as circunferências $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$.

   (d) $\displaystyle\int_\gamma \frac{x^2y}{x^2+1}dx - \arctan x dy$, onde $\gamma$ é a elipse $4x^2 + 25y^2 = 100$.

   (e) $\int_\gamma (6y + x)dx + (y + 2x)dy$, onde $\gamma$ é a circunferência $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 4$.

9. Utilize o Teorema de Green para calcular $\oint_\gamma \cos(x-3y)dx + \ln(x+y)dy$ , onde $\gamma$ é o quadrilátero $ABCD$ de vértices $A(\frac{7}{4}, \frac{1}{4})$, $B(\frac{9}{4}, -\frac{1}{4})$, $C(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$ e $D(1, 0)$.

10. Use o Teorema de Green para calcular $\oint_\gamma e^{x+y}dx + e^{x+y}dy$, onde $\gamma$ é a circunferência $x^2+y^2 = 4$.

11. Em cada item, verifique o Teorema da divergência no plano e o Teorema de Stokes no plano para $\vec{F}$ e $\Omega$ dados.

    (a) $\vec{F}(x,y) = 3x\vec{i} + 2y\vec{j}$, e $\Omega$ é a região limitada pela circunferência $x^2+y^2 = 1$.

    (b) $\vec{F}(x,y) = (x^2, y^2)$, e $\Omega$ a região limitada pela elipse $4x^2 + 25y^2 = 100$.

12. Sejam $u$ e $v$ funções escalares possuindo derivadas parciais primeiras contínuas no domínio aberto e conexo $\Omega$ do plano $xy$. Seja $\gamma$ uma curva suave fechada simples em $\Omega$. Mostre que

$$\oint_\gamma uv\,dx + uv\,dy = \iint_\Omega \left[ v\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) + u\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)\right] dA.$$

13. Use o Teorema da Divergência para mostrar que, dado um campo escalar $g : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ com derivadas parciais contínuas até a segunda ordem no aberto $\Omega$ e $\gamma$ uma curva suave fechada simples em $\Omega$, então

$$\oint_\gamma g\frac{\partial g}{\partial \overrightarrow{n}} ds = \iint_\Omega (g\Delta g + ||\nabla g||^2) dA.$$

    **Obs.:** a quantidade $\nabla g \cdot \overrightarrow{n} := \frac{\partial g}{\partial \overrightarrow{n}}$ aparece na integral de linha. A derivada direcional de $g$ na direção do vetor normal $\overrightarrow{n}$ é chamada de *derivada normal* de $g$.

14. Use o Teorema de Green na forma vetorial para provar a *primeira identidade de Green*:

$$\iint_\Omega f\Delta g dA = \oint_\gamma f(\nabla g)\cdot \overrightarrow{n} ds - \iint_\Omega \nabla f \cdot \nabla g dA,$$

    onde $\Omega$ e $\gamma$ satisfazem as hipóteses do Teorema de Green e as derivadas parciais apropriadas de $f$ e $g$ existem e são contínuas.

15. Use a primeira identidade de Green do exercício anterior para provar a *segunda identidade de Green*:

$$\iint_\Omega (f\Delta g - g\Delta f) dA = \oint_\gamma (f\nabla g - g\nabla f)\cdot \overrightarrow{n} ds$$

    onde $\Omega$ e $\gamma$ satisfazem as hipóteses do Teorema de Green e as derivadas parciais apropriadas de $f$ e $g$ existem e são contínuas.