CÁLCULO 1, T2

22/08/24 – AULA 27

DERIVADAS DE ORDENS SUPERIORES:

Def.: Seja f uma função duas vezes derivável. Definimos a derivada segunda de f por:

$$f''(x) = f'(f'(x)), \text{ se existir.}$$

Outras notações para a derivada segunda são:

$$y'' = f''(x) = \frac{d^2 f}{dx^2} = D_2(f);$$ onde, por exemplo:

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right)$$

↳ LÊ-SE: DERIVADA SEGUNDA DE f EM RELAÇÃO A x PELA SEGUNDA VEZ.

Ex.: $y = x^4 - \operatorname{sen} 2x$. y''?

Solução: $y' = 3x^3 - \cos 2x \cdot 2$

$$y'' = 9x^2 - 2.(-\operatorname{sen} 2x \cdot 2)$$

$$\boxed{y'' = 9x^2 + 4\operatorname{sen} 2x}$$

Podemos definir derivada de ordem n como:

$$f^{(n)}(x) = f\left(f^{(n-1)}(x)\right).$$

Ex: $y = e^{2x}$. $y^{(5)} = ?$

$\hookrightarrow$ DERIVADA DE ORDEM 5.

$$\boxed{(e^{u})' = e^{u} \cdot u'}$$

$$y' = e^{2x} \cdot 2 = 2 \cdot e^{2x}$$

$$y'' = 2 \cdot e^{2x} \cdot 2 = 4 \cdot e^{2x}$$

$$y''' = 4 \cdot e^{2x} \cdot 2 = 2^{3} \cdot e^{2x}$$

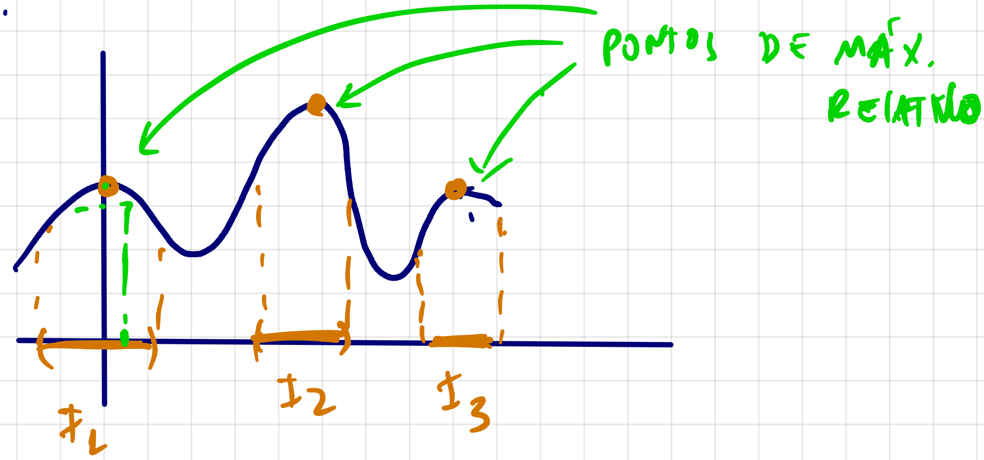
$$y^{(4)} = 2^{3} \cdot e^{2x} \cdot 2 = 2^{4} e^{2x}$$

$$y^{(5)} = 2^{4} \cdot e^{2x} \cdot 2 \Rightarrow y^{(5)} = 2^{5} \cdot e^{2x}$$

$$= 32\, e^{2x}$$

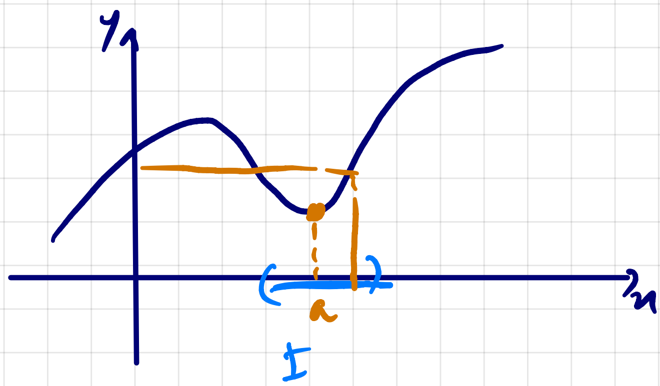
EXTREMOS RELATIVOS E ABSOLUTOS.

Def: Seja $f: X \to \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que $a \in X$ é um ponto de MÁXIMO RELATIVO se, e só se, existir um intervalo I contendo a tal que $f(x) \le f(a)$, $\forall x \in I$.



Def: Dizemos que $a \in X$ é um ponto de MÁXIMO ABSOLUTO de $f: X \to \mathbb{R}$ se, e só se, $f(x) \le f(a)$, $\forall x \in X$.

Def: Seja $f: X \to \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que $a \in X$ é um ponto de MÍNIMO RELATIVO se, e só se, existir um intervalo I contendo a tal que $f(x) \ge f(a)$, $\forall x \in I$.



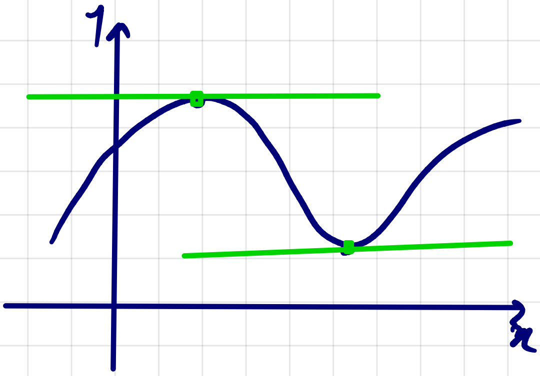
Def: Dizemos que $a \in X$ é um ponto de MÍNIMO ABSOLUTO de $f: X \to \mathbb{R}$ se, e só se, $f(x) \ge f(a)$, $\forall x \in X$.

Def: Dizemos que um ponto $a \in X$ é um extremo relativo para $f: X \to \mathbb{R}$ se for um ponto de MÁXIMO ou de MÍNIMO relativo.

(analogamente para absoluto)

PROPOSIÇÃO: Se $f: X \to \mathbb{R}$ possui um ponto $a \in X$ extremo relativo, então $f'(a) = 0$, se a derivada existir.

IDEIA GEOMÉTRICA: De fato, se a for um extremo relativo, existindo uma reta tangente ao gráfico de f, esta será paralela ao eixo horizontal. E como, geometricamente, a derivada de uma função em um ponto representa a inclinação da reta tangente ao gráfico de f neste ponto, a mesma será paralela ao eixo horizontal.



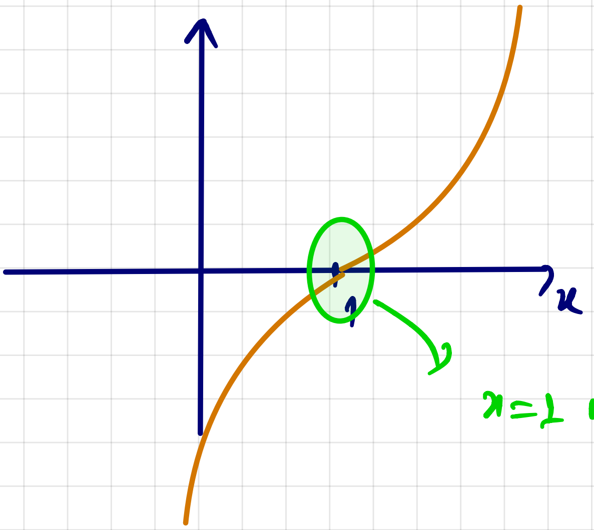
A recíproca da proposição acima, no entanto, geralmente é falsa. Ou seja, o fato de que $f'(c) = 0$, não implica em c ser um ponto extremo.

Por exemplo, tome $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x-1)^3$.

Neste caso, temos $f'(x) = 3(x-1)^2 \cdot 1 = 3(x-1)^2$

Logo, $f'(1) = 3\cdot(1-1)^2 = 0 \Rightarrow \boxed{f'(1)=0}$

No entanto, $x=1$ não é extremo de f:



Def: Dizemos que um ponto $a \in X$ é um ponto crítico para $f: X \to \mathbb{R}$, f derivável, se, e só se,

$$f'(x)=0 \quad \text{ou} \quad \nexists f'(x).$$

Ex.: Obtenha os pontos críticos (caso existam) de $f: [0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x-1)\sqrt{x}$.

Solução: Precisamos ver onde $f'(x)=0$ ou onde $\nexists f'(x)$.

$$f(x) = (x-1)\cdot x^{\frac{1}{2}} = u\cdot v$$

$$f'(x) = u\cdot v' + u'\cdot v \quad \left\{ \begin{array}{l} u = x-1 \Rightarrow u' = 1 \\ v = x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow v' = \frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}}\cdot 1 \\ \Rightarrow v' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{array} \right.$$

Portanto:

$$f'(x) = (x-1) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} + 1 \cdot \frac{\sqrt{x}}{1} = \frac{x-1+2x}{2\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{3x-1}{2\sqrt{x}}$$

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x-1=0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$

- $\nexists f'(x) \Leftrightarrow x = 0$

PONTOS CRÍTICOS

PROPOSIÇÃO: Seja $f: X \to \mathbb{R}$ uma função derivável, com $a \in X$ um ponto crítico de f. Então:

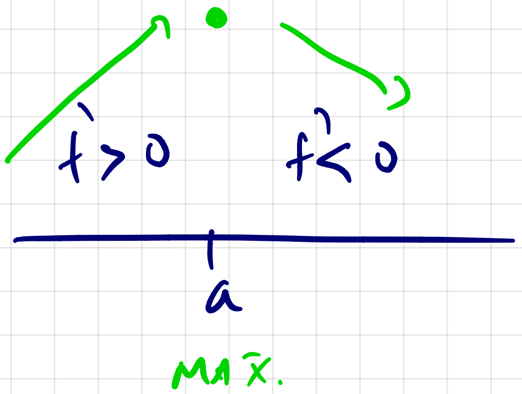
- se $f'(x) < 0$ em $(a-\delta, a)$, $\delta > 0$ e $f'(x) > 0$ em $(a, a+\delta)$, $\delta > 0$, então a será um ponto de MÍNIMO RELATIVO.

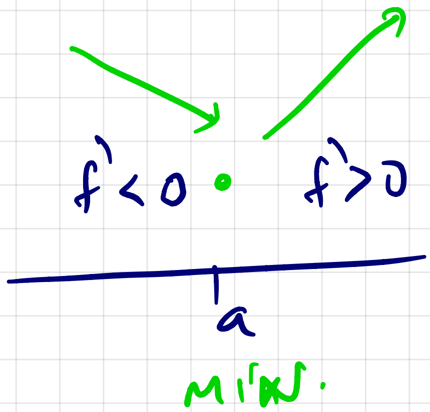
- se $f'(x) > 0$ em $(a-\delta, a)$, $\delta > 0$ e $f'(x) < 0$ em $(a, a+\delta)$, $\delta > 0$, então a será um ponto de MÁXIMO RELATIVO.

Além disso, f é crescente $\iff f'(x) \geq 0$ e

f é decrescente $\iff f'(x) \leq 0$. $\square$

Ou seja, o que precisamos fazer é examinar o sinal de $f'(x)$.





Ex.: Encontre, se existirem, os pontos de máximo e mínimo de $f(x) = (x-1)\sqrt{x}$, determinando os intervalos de crescimento e decrescimento.

Solução: pontos críticos:

onde $f'(x) = 0$ e onde $\nexists\, f'(x)$.

$$f'(x) = \frac{3x-1}{2\sqrt{x}}$$ (FEITO NO EXEMPLO ANTERIOR)

- $f'(x) = 0 \iff 3x - 1 = 0 \iff x = \frac{1}{3}$

- $\nexists\, f'(x) \iff x = 0$

Nota que $D(f) = [0, +\infty)$

Vamos estudar o sinal de $f'(x)$.

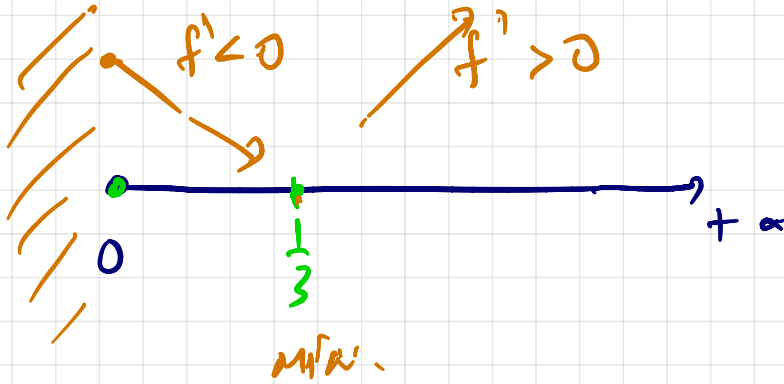
Note que $f'(x) = \dfrac{3x-1}{2\sqrt{x}}$; $D(f) = [0, +\infty)$ e

$D(f') = (0, +\infty)$

Além disso, o denominador, neste caso, é sempre positivo. Logo, quem decide o sinal da derivada é o numerador. Assim:

- $f'(x) < 0 \iff 3x - 1 < 0$
  $\iff x < \dfrac{1}{3}$

- $f'(x) > 0 \iff 3x - 1 > 0$
  $\iff x > \dfrac{1}{3}$

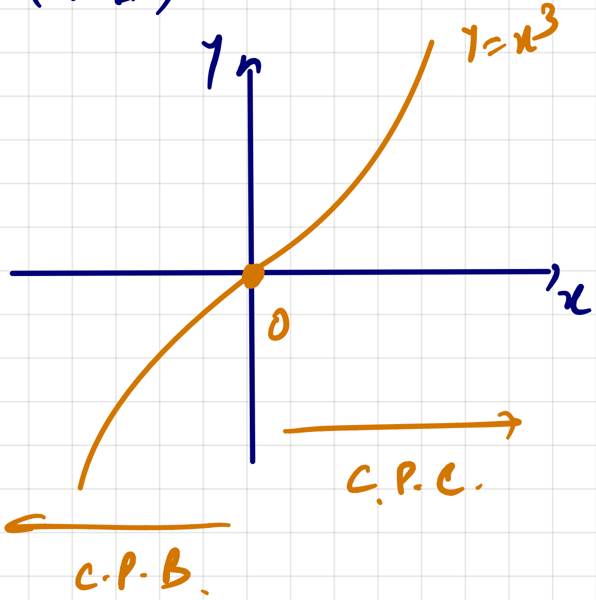


Temos, então, que:

- f é crescente em $\left(\dfrac{1}{3}, +\infty\right)$
- f é decrescente em $\left(0, \dfrac{1}{3}\right)$
- $\exists$ mín. $\left(\dfrac{1}{3}, f\left(\dfrac{1}{3}\right)\right)$
- $\exists$ máx. $(0, f(0))$ [ANÔMALO P/ ESTE EXERCÍCIO]

Def.: Dizemos que um ponto $a \in X$ é um PONTO DE INFLEXÃO para $f: X \to \mathbb{R}$ se, e só se, em torno deste ponto o gráfico de f mudar o sentido da concavidade.

Ex.: $y = x^3$, temos que $x = 0$ é um PONTO DE INFLEXÃO (P.I.)



Prop.: Os possíveis pontos de inflexão são obtidos onde $f''(x) = 0$ ou onde $\nexists f''(x)$.

No caso, o gráfico de f:

- possui concavidade para cima (C.P.C.) onde $f''(x) > 0$
- possui concavidade para baixo (C.P.B.) onde $f''(x) < 0$.

Ex.: $f: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x-1) \cdot \sqrt{x}$.

Ache os pontos de inflexão, se existirem, e estude a concavidade de f.

Solução: $f'(x) = \dfrac{3x-1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{u}{v} =$

$$\Rightarrow f''(x) = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{v u' - u v'}{v^2} \quad \left[\begin{array}{l} u = 3x-1 \Rightarrow u' = 3 \\ v = 2x^{1/2} \Rightarrow v' = \cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \cdot x^{-\frac{1}{2}} \\ v' = \frac{1}{\sqrt{x}} \end{array}\right.$$

$$f''(x) = \frac{\frac{2\sqrt{x} \cdot 3}{1} - (3x-1) \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}}{(2\sqrt{x})^2}$$

$$f''(x) = \frac{\frac{6 \cdot (\sqrt{x})^{2} - 3x + 1}{\sqrt{x}}}{4x} = \frac{6x - 3x + 1}{4x \cdot \sqrt{x}}$$

$$f''(x) = \frac{3x+1}{4x\sqrt{x}}.$$

- $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3} \notin D(f) = [0, +\infty)$
- $\nexists\, f''(x) \Leftrightarrow x = 0$ (não será P.I pois não tem como mudar o sentido da concavidade

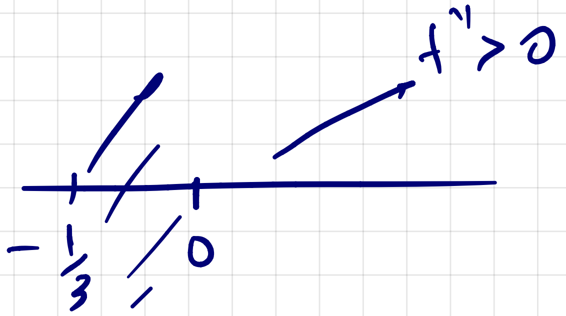
em torno de $x=0$, pois $D(f): [0, +\infty)$)

Logo, $\nexists$ P.I.

concavidade: $f''(x) = \dfrac{3x+1}{4x\sqrt{x}}$.

como $x>0$, o denominador é sempre positivo. Logo, quem decide o sinal de f'' é o numerador

• $f''(x) > 0 \iff 3x+1>0 \iff 3x > -1 \iff x > -\frac{1}{3}$



C.P.C. em todo o seu domínio.

Temos, com este estudo, condições de esboçar um gráfico com melhor precisão.

Ex-1 Faça um estudo completo de

$$f(x) = \frac{x+1}{(x-1)^2},$$ esboçando o seu gráfico.

Solução: (a) $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. pois: $x - 1 \neq 0$

$x \neq 1$.

logo: $x = 1$ é ASSÍNTOTA VERTICAL.

zeros: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

ZERO.

- $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{x+1}{(x-1)^2} = \frac{1+1}{(0^-)^2} = \frac{2}{0^+} = +\infty$

- $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{x+1}{(x-1)^2} = \frac{1+1}{(0^+)^2} = \frac{2}{0^+} = +\infty$.

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x+1}{(x-1)^2} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x+1}{x^2 - 2x + 1} =$

$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}} = 0$. ASSÍNTOTA HORIZONTAL: $y = 0$

(b) MÁX. / MÍN e CRES/ DECRES. estudamos o sinal de $f'(x)$.

$f(x) = \frac{x+1}{(x-1)^2} = \frac{u}{v}$

$\begin{cases} u = x+1 \Rightarrow u' = 1 \\ v = (x-1)^2 \Rightarrow v' = 2(x-1) \cdot 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{v\cdot u' - u\cdot v'}{v^2} = \frac{(x-1)^2\cdot 1 - (x+1)\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4}$$

$$f'(x) = \frac{\cancel{(x-1)}\,[x-1 - 2(x+1)]}{(x-1)^{\cancel{4}\,3}}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{x-1-2x-2}{(x-1)^3} \Rightarrow f'(x) = \frac{-x-3}{(x-1)^3}$$

PONTOS CRÍTICOS: onde $f'(x)=0$ e onde $\nexists\, f'(x)$.

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x-3=0 \Leftrightarrow x=-3$
- $\nexists\, f'(x) \Leftrightarrow x-1=0 \cancel{\Leftrightarrow x=1}$. (DESCARTAMOS POIS É A ASSÍNTOTA VERTICAL)

estudo do sinal da derivada:

$$f'(x) = \frac{-x-3}{(x-1)^3}$$

SINAL DO NUM: $-x-3>0 \Leftrightarrow -x>3 \Leftrightarrow x<-3$

$-x-3<0 \Leftrightarrow -x<3 \Leftrightarrow x>-3$

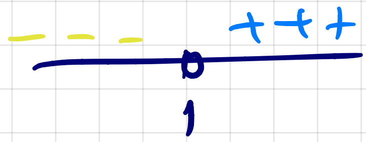
$+ + +$ | $- - - -$

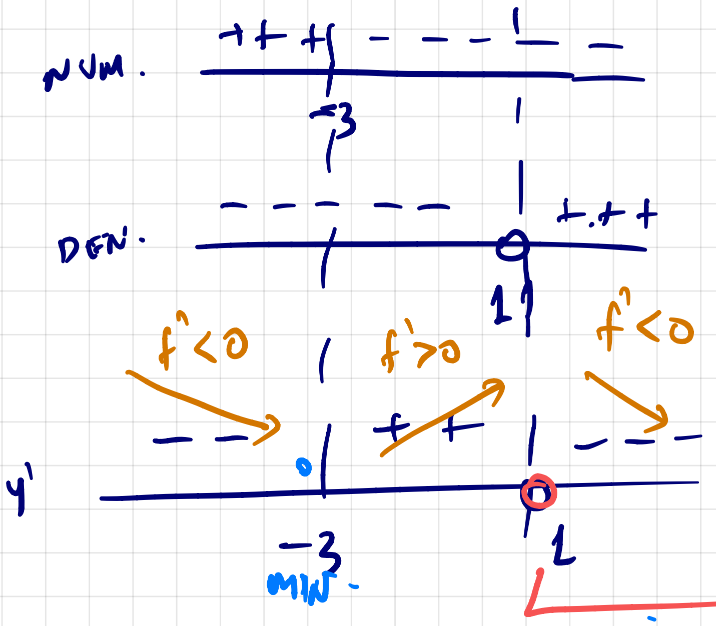
-3

SINAL DO DENOM.:

$(x-1)^3>0 \Leftrightarrow x-1>0 \Leftrightarrow x>1$

$(x-1)^3<0 \Leftrightarrow x-1<0 \Leftrightarrow x<1$





PARECE SER PONTO DE MÁX., MAS NÃO É, POIS $x=1$ é ASSÍNTOTA VERTICAL

Logo, obtemos que:

- f é crescente em $(-3, 1)$;
- f é decrescente em $(-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$
- $\exists$ MÍN. $(-3, f(-3)) = \left(-3, \frac{-3+1}{(-3-1)^2}\right) = \left(-3, -\frac{1}{8}\right)$
- $\nexists$ MÁX.

(c) CONCAVIDADE / INFLEXÃO:

Precisamos estudar o sinal de $f''(x)$.

$$f'(x) = \frac{-x-3}{(x-1)^3} = \frac{u}{v}$$

$$\begin{cases} u = -x-3 \Rightarrow u' = -1 \\ v = (x-1)^3 \Rightarrow v' = 3(x-1)^2 . 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f''(x) = \frac{v . u' - u . v'}{v^2}$$

$$\Rightarrow f''(x) = \frac{(x-1)^3 . (-1) - (-x-3) . 3 . (x-1)^2}{\left[(x-1)^3\right]^2}$$

$$f''(x) = \frac{(x-1)^{\cancel{2}} . \left[-1 + 3(x+3)\right]}{(x-1)^{\cancel{6}\,4}}$$

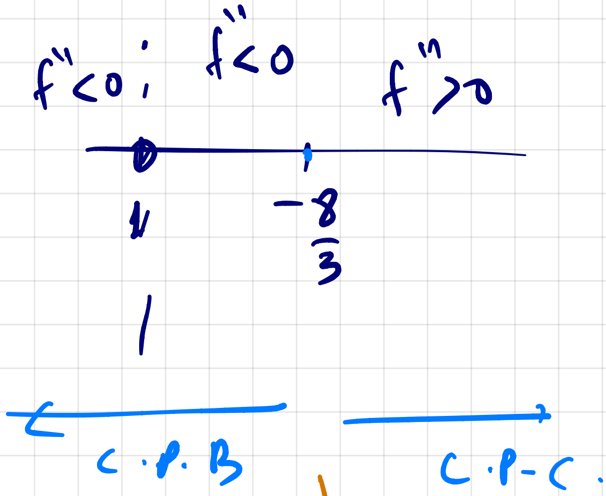
$$f''(x) = \frac{3x+8}{(x-1)^4}$$

Como o denominador é sempre positivo (POTÊNCIA 4) então, quem decide o sinal de f'' é o numerador.

Assim:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 3x+8 = 0 \Leftrightarrow \underbrace{x = -\frac{8}{3}}_{\text{CANDIDATO A P.I.}}$$

- $f''(x) > 0 \Leftrightarrow 3x+8>0 \Leftrightarrow 3x>-8 \Leftrightarrow x > -\frac{8}{3}$
- $f''(x) < 0 \Leftrightarrow 3x+8<0 \Leftrightarrow 3x<-8 \Leftrightarrow x < -\frac{8}{3}$



$\exists$ P.I. $\left(-\frac{8}{3}, f\left(-\frac{8}{3}\right)\right)$

esboço gráfico: