CÁLCULO 1, T1

21/08/24 – AULA 29

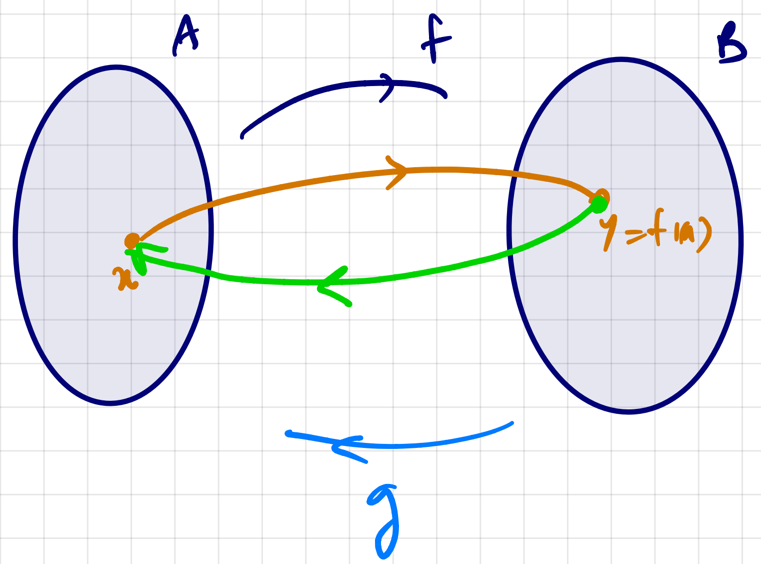
DERIVADAS DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS:

Dada $f: A \to B$ função. Perguntamos: que condições f deve satisfazer para que exista uma função $g: B \to A$ tal que: dado $x \in A \Rightarrow f(x) \in B$; e disso, $g(f(x)) = x$.

$(g \circ f)(x) = x$

e

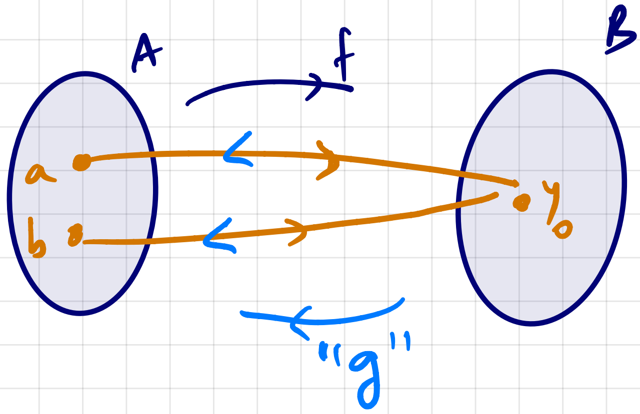
$(f \circ g)(y) = y$



Existindo $g: B \to A$ tal que, para o $y \in B$, $g(y)$ "recupera" $x \in A$, tal g é a INVERSA de f.

Porém, para existir tal inversa a f deve ser bijetiva (i.e., injetiva e sobrejetiva)

De fato, se f não for injetiva:

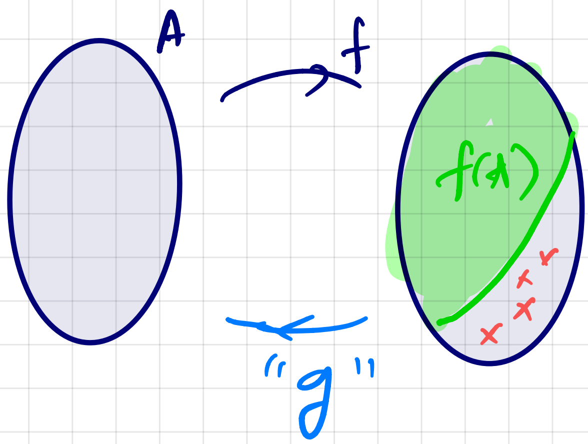


$a \neq b$ mas

$f(a) = f(b) = y_0$

NESTE CASO A CANDIDATA À INVERSA $g: B \to A$ NÃO É UMA FUNÇÃO, POIS $g(y_0) = a$ e $g(y_0) = b$, COM $a \neq b$, O QUE CONTRADIZ O CONCEITO DE FUNÇÃO.

Além disso, se $f: A \to B$ não for sobrejetiva:



A CANDIDATA $g: B \to A$ NÃO É FUNÇÃO, POIS HÁ ELEMENTOS DE B ($D(g)$) TAIS QUE NÃO POSSUEM IMAGEM EM A PELA g.

Logo, $f: A \to B$ é inversível $\iff$ f for bijetiva.

NOTAÇÃO DA INVERSA:
$g: B \to A$
$g = f^{-1}$

Mas então, por exemplo a função

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \operatorname{sen} x$$

não tem inversa! (não é bijetiva)

POR EXEMPLO:
$$Im(\operatorname{sen}) = [-1, 1] \neq \mathbb{R} = CD(f)$$

Além disso, sen x não é injetiva.

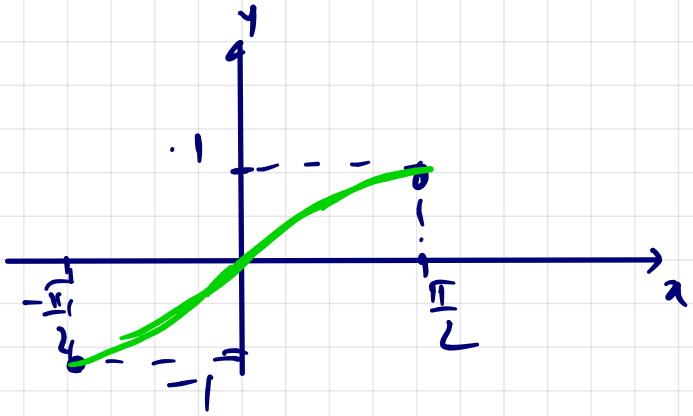
EX: $0 \neq 2\pi$, mas

$$\operatorname{sen} 0 = \operatorname{sen} 2\pi = 0$$

No entanto, o que se faz é restringir domínio e contradomínio de modo que se torne bijetiva e, portanto, inversível.

Assim, redefine $f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$,

$$f(x) = \operatorname{sen} x.$$



Dessa forma, sendo bijetiva,

$$\exists\ f^{-1}: [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$x = f^{-1}(y) \qquad \text{(BASTA ISOLAR O } x\text{)}$$

$$y = \operatorname{sen} x \iff x = \operatorname{arc\,sen}(y)$$

EX.: $\frac{1}{2} = \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} \iff \frac{\pi}{6} = \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{2}\right)$

Dessa forma, dado $y = \operatorname{arcsen} v$, onde $v = v(x)$; qual será sua derivada y'?

solução:

$$y = \operatorname{arcsen} v \iff v = \operatorname{sen} y, \text{ com}$$

$y = y(x)$ e $v = v(x)$.

Derivando implicitamente em x, vem:

$$u = \operatorname{sen} y$$

$$u' = \cos y \cdot y' \Rightarrow y' = \frac{u'}{\cos y}$$

Da relação trigonom. fundamental:

$$\operatorname{sen}^2 y + \cos^2 y = 1 \Rightarrow \cos^2 y = 1 - \operatorname{sen}^2 y$$

$$\boxed{\cos y = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 y}}$$

Disso:

$$y' = \frac{u'}{\cos y} = \frac{u'}{\sqrt{1 - \underbrace{\operatorname{sen}^2 y}_{u^2}}} \Rightarrow y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

Conclusão:

$$y = \operatorname{arcsen} u \Rightarrow y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}.$$

Ex.! $y = \operatorname{arcsin}(x - \sqrt{x})$. $y' = ?$

$$y = \operatorname{arcsen} u \Rightarrow y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$u = x - x^{1/2} \Rightarrow u' = 1 - \frac{1}{2} \cdot x^{-1/2} \cdot 1$$

$$u' = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Portanto,

$$y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{1-(x-\sqrt{x})^2}}$$

$$y = \arctan u \Rightarrow y' = ? \qquad y' = \frac{u'}{1+u^2}$$

Ex: $y = \arctan \sqrt{x}$. $\qquad y' = ?$

$$u = x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow u' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \cdot 1 = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{u'}{1+u^2}$$

$$y' = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1 + (\sqrt{x})^2} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1+x} =$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}\cdot(1+x)}$$

RESOLUÇÃO DE EXERCÍCIOS:

L4:

9. Usando o segundo limite notável, prove o importante limite abaixo, onde $a > 0$, $a \neq 1$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$$

Solução: Escreva. $w = a^x - 1 \Rightarrow 1 + w = a^x$

$$\Rightarrow \ln(1+w) = \ln a^x$$

$$\Rightarrow \ln(1+w) = x \cdot \ln a$$

$$\Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{\ln a} \cdot \ln(1+w)}$$

$w \to 0$

$x \to 0$

Dessa forma, teremos:

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{w\to 0} \frac{w}{\frac{1}{\ln a} \cdot \ln(1+w)} =$$

$$= \lim_{w\to 0} \ln a \frac{w}{\ln(1+w)} = \lim_{w\to 0} \ln a \cdot \frac{1}{\frac{1}{w} \cdot \ln(1+w)}$$

$$= \underbrace{\lim_{w\to 0} \ln a}_{\ln a} \cdot \lim_{w\to 0} \frac{1}{\ln(1+w)^{\frac{1}{w}}} =$$

$$= \ln a \cdot \frac{\lim_{w\to 0} 1}{\lim_{w\to 0} \ln (1+w)^{\frac{1}{w}}} = \ln a \frac{1}{\ln \lim_{w\to 0} (1+w)^{\frac{1}{w}}} =$$

$\to e$

$$= \ln a \cdot \frac{1}{\underbrace{\ln e}_{=1}} = \ln a.$$

$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\alpha} \underset{\alpha\to 0}{\longrightarrow} 1$ ou $\frac{\tan \alpha}{\alpha} \underset{\alpha\to 0}{\longrightarrow} 1$

L8

08) – (t) (t) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \operatorname{sen} x}{x^2 \operatorname{sen} 4x}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \operatorname{sen} x}{x^2 \cdot \operatorname{sen} 4x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} - \operatorname{sen} x}{x^2 \operatorname{sen} 4x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x \cdot \cos x}{\cos x}}{x^2 \cdot \operatorname{sen} 4x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x (1 - \cos x)}{\cos x} \cdot \frac{1}{x \cdot x \cdot \operatorname{sen} 4x} =$$

1

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x \left(\frac{\operatorname{sen}^2 x}{1+\cos x} \right)}{\cos x \cdot x^2 \cdot \operatorname{sen} 4x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\operatorname{sen} x}{x} \to 1}{4 \cdot \cos x \cdot \frac{\operatorname{sen} 4x}{4x} (1+\cos x)} \cdot \underbrace{\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2}_{1} = \frac{1}{4 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (1+1)}$$

$\frac{\operatorname{sen} 4x}{4x} \to 1$

$$= \frac{1}{8}$$

15

3. Mostre que a função real definida por

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \text{sen}\,\frac{1}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

é contínua em $x = 0$.

~~ton~~ 0

Solução: Precisamos mostrar que

$$\exists \lim_{x \to 0} f(x) = f(0).$$

No caso, $f(0) = 0$

Afi: $\lim_{x \to 0} x \cdot \text{sen}\,\frac{1}{x} = 0.$

Dado $\varepsilon > 0$, precisamos achar $\delta > 0$ tal que

$\forall x \in D(f)$: $|x - 0| < \delta$, implique em

$$|f(x) - \underbrace{f(0)}_{=0}| < \varepsilon. \quad , \text{ i.e;}$$

$$|x| < \delta \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon.$$

Analisando $|f(x)|$:

$$|f(x)| = \left|x \cdot \text{sen}\,\frac{1}{x}\right| = |x| \cdot \underbrace{\left|\text{sen}\,\frac{1}{x}\right|}_{\leq 1} \leq |x| < \delta = \varepsilon.$$

$|\text{sen}\,\alpha| \leq 1, \forall \alpha$

Ou seja, basta tomar $\delta = \varepsilon$.

Portanto, $\lim_{x \to 0} x \cdot \text{sen} \frac{1}{x} = 0 = f(0)$; ou seja,

f é contínua em $x = 0$.

LS:

7. Prove que $f(x) = x - x^2$ é uma função contínua em toda a reta.

Dado $a \in \mathbb{R}$ um ponto qualquer.
Vamos mostrar que f é cont. em a.
Dado $\varepsilon > 0$. Precisamos encontrar $\delta > 0$, tal que,
$\forall x \in \mathbb{R}$; $|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Avaliando $|f(x) - f(a)|$:

$$|f(x) - f(a)| = |x - x^2 - (a - a^2)| = |x - x^2 - a + a^2| =$$

$$= |x - a - (x^2 - a^2)| \leq \underbrace{|x-a|}_{< \delta} + |x^2 - a^2| <$$

$$< \delta + \underbrace{|x-a|}_{< \delta} \cdot |x+a| < \delta + \delta \cdot |x+a|.$$

Note que:
$$|x+a| = |x - a + a + a| = |x - a + 2a| \leq$$
$$|x-a| + 2 \cdot |a| < \delta + 2|a|$$

Assim:

$$|f(x)-f(a)| < \delta + \delta\cdot|x+a| < \delta + \delta\cdot(\delta + 2|a|)$$

$$= \delta + \delta^2 + 2\delta\cdot|a| = \delta^2 + \delta\cdot(1+2|a|)$$

Assuma que $0<\delta<1$. Assim: $\delta^2<\delta$; então:

$$|f(x)-f(a)| < \underbrace{\delta^2}_{<\delta} + \delta(1+2|a|) = \delta + \delta(1+2|a|)$$

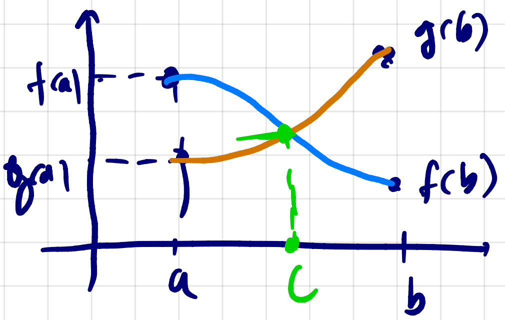
$$= \delta(2+2\cdot|a|) = \varepsilon.$$

$$\boxed{\delta = \frac{\varepsilon}{2+2|a|}, \quad 0<\delta<1.}$$

L5

11. Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funções contínuas em $[a, b]$, tais que $f(a) \geq g(a)$ e $f(b) \leq g(b)$. Prove que existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = g(c)$.

Solução:



Define $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ por

$h(x) = f(x) - g(x)$

Então, h é contínua, pois f e g o são.

Além disso, temos:

- $h(a) = f(a) - g(a) \geq 0$ ← pois $f(a) \geq g(a)$

• $h(b) = f(b) - g(b) \leq 0$

pois $f(b) \leq g(b)$

Então, temos

$$h(b) \leq 0 \leq h(a) \quad ; \quad \text{com } h \text{ contínua.}$$

Então, pelo T.V.I. aplicado para h, segue que

$\exists\ c$ entre a e b tal que $h(c) = 0$.

Ou seja,

$$0 = h(c) = f(c) - g(c) \implies \boxed{f(c) = g(c)}$$

$\square$

L6:

4. Prove que se $f(x)$ é derivável em $x = a$, então

$$\lim_{x \to a} \frac{x f(a) - a f(x)}{x - a} = f(a) - a f'(a).$$

$\exists\ f'(a)$.

solução:

$$\lim_{x \to a} \frac{x . f(a) - a . f(x)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{x . f(a) - a . f(a) + a . f(a) - a . f(x)}{x - a}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{f(a) . \cancel{(x - a)}}{\cancel{x - a}} + \frac{a . [f(a) - f(x)]}{x - a} =$$

$$= \lim_{x \to a} f(a) + \lim_{x \to a} - a . \frac{f(x) - f(a)}{x - a} =$$

$$= f(a) - a . \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f(a) - a . f'(a)$$