Fundação Universidade Federal de Pelotas
Disciplina de Cálculo 1 - Prof. Dr. Maurício Zahn
Cursos 3900, 3910, 6100 e 6400
Lista 04 de Exercícios - Estudo de Limites

1. Esboce o gráfico da função $f(x) = 1 - \tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$, indicando domínio e imagem. Pelo gráfico, o que se conclui quanto aos limites $\lim\limits_{x \to \frac{5\pi}{12}^+} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to \frac{5\pi}{12}^-} f(x)$?

2. Supondo que vale a seguinte cadeia de desigualdades
$$1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4},$$
prove que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x} = 0$.

3. Seja f uma função tal que para todo $x \neq 0$, $-x^2 + 3x \leq f(x) < \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$. Calcule $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ e justifique.

4. Suponha que para todo x, $|g(x)| \leq x^4$. Calcule $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{g(x)}{x}$.

5. Dada a função f em cada item, faça o seu esboço gráfico e ache o limite indicado, justificando sua existência ou não.

   (a) $f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ se } x \leq 2 \\ 8 - 2x, \text{ se } x > 2. \end{cases}$ (i) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$, (ii) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$, (iii) $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$.

   (b) $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$. (i) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$, (ii) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$, (iii) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

6. Dada $f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ se } x \leq -2 \\ ax + b, \text{ se } -2 < x < 2 \\ 2x - 6, \text{ se } x \geq 2 \end{cases}$, ache os valores de a e b tais que existam os limites $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$.

7. Dados $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3, \text{ se } x \leq 1 \\ x + 1, \text{ se } 1 < x \end{cases}$ e $g(x) = \begin{cases} x^2, \text{ se } x \leq 1 \\ 2, \text{ se } 1 < x \end{cases}$

   (a) Mostre que $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ existem, mas não são iguais e, portanto, $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ não existe.

   (b) Mostre que $\lim\limits_{x \to 1^-} g(x)$ e $\lim\limits_{x \to 1^+} g(x)$ existem, mas não são iguais e, portanto, $\lim\limits_{x \to 1} g(x)$ não existe.

   (c) Ache as fórmulas que definem $f(x)g(x)$.

   (d) Prove que $\lim\limits_{x \to 1} f(x)g(x)$ existe, mostrando que $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)g(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x)g(x)$.

8. Calcule cada limite abaixo, se existir:[1]

(a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2 - x + 3}{x^3 - 8x + 5}$ (b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - 5x + 1}{3x - 7}$ (c) $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x + 3}{x + \sqrt[3]{x}}$

(d) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2 + 1}}{x + 1}$ (e) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2 - 5x + 6} - x$ (f) $\lim_{x\to+\infty} x(\sqrt{x^2 + 1} - x)$

(g) $\lim_{x\to-1} \frac{2}{x + 1}$ (h) $\lim_{x\to3} \frac{1}{x^2 - 9}$ (i) $\lim_{x\to0} \frac{1}{x^2}$

(j) $\lim_{x\to0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{2x}$ (k) $\lim_{x\to0} \frac{\operatorname{sen} 5x}{\operatorname{sen} 7x}$ (ℓ) $\lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{sen}(2x - 1)}{2 - 4x}$

(m) $\lim_{x\to0} \frac{1 - \cos x}{2x^2}$ (n) $\lim_{x\to0} \frac{x - \operatorname{sen} 2x}{x + \operatorname{sen} x}$ (o) $\lim_{x\to0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x^2}$

(p) $\lim_{x\to0} \frac{\arctan 2x}{\operatorname{sen} 3x}$ (q) $\lim_{x\to0} \frac{\sqrt{1 + \operatorname{sen} x} - \sqrt{1 - \operatorname{sen} x}}{x}$ (r) $\lim_{x\to0} \frac{1 - \cos 2x}{x \tan 3x}$

(s) $\lim_{x\to0} \frac{\operatorname{sen} 2x - \tan 3x}{4x - \operatorname{sen} x}$ (t) $\lim_{x\to0} \frac{\tan x - \operatorname{sen} x}{x^2 \operatorname{sen} 4x}$ (u) $\lim_{x\to\pi} \frac{1 - \operatorname{sen} \frac{x}{2}}{\pi - x}$

(v) $\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{3}{2x}\right)^{-2x}$ (x) $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2 + 2x}{x^2 - 1}\right)^{6x-4}$ (y) $\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x + 4}\right)^{\frac{1-2x^2}{3x-1}}$

(w) $\lim_{x\to0} (1 + 2\operatorname{sen} x)^{\cot x + 4}$ (z) $\lim_{x\to0} \left(\frac{x^2 + 3x + 1}{x^3 + 1}\right)^{\frac{1}{x}}$ (α) $\lim_{x\to0} \frac{1}{x^2} \ln \sec x$

(β) $\lim_{x\to0} \frac{2x + \operatorname{sen} 3x}{x^3} \ln \sec x$ (γ) $\lim_{x\to\infty} x\left(\ln(5 + 3x + 3x^2) - \ln(3x^2)\right)$

9. Usando o segundo limite notável, prove o importante limite abaixo, onde $a > 0$, $a \neq 1$:

$$\lim_{x\to0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$$

10. Usando o exercício anterior, calcule os seguintes limites:

(a) $\lim_{x\to0} \frac{2^x - 3^x}{\operatorname{sen} 3x}$ (b) $\lim_{x\to0} \frac{e^{mx} - 1}{3^x - 8^{2x}}$ (c) $\lim_{x\to0} \frac{\operatorname{senh} x}{x}$

11. Com ajuda dos limites laterais, infinitos e no infinito, esboçar os gráficos das seguintes funções, indicando domínio e imagem:

(a) $f(x) = \frac{x}{2x - 1}$ (b) $f(x) = \frac{3 - 2x}{9 - x^2}$ (c) $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 2}$

(d) $f(x) = \frac{x - 2}{x - x^2}$ (e) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{1 - x^2}$ (f) $f(x) = \left|\frac{2x - 5}{x^2 - 1}\right|$

[1] Respostas
(a) 0 (b) $+\infty$ (c) 2 (d) 0 (e) $-\frac{5}{2}$ (f) $\frac{1}{2}$ (g) $\nexists$ (h) $\nexists$ (i) $+\infty$ (j) $\frac{3}{2}$ (k) $\frac{5}{7}$ (ℓ) $-\frac{1}{2}$
(m) $\frac{1}{4}$ (n) $-\frac{1}{2}$ (o) $\frac{1}{4}$ (p) $\frac{2}{3}$ (q) 1 (r) $\frac{2}{3}$ (s) $-\frac{1}{3}$ (t) $\frac{1}{8}$ (u) 0 (v) e^{-3} (x) e^{12}
(y) $e^{\frac{2}{3}}$ (w) e^2 (z) e^3 (α) $\frac{1}{2}$ (β) $\frac{5}{2}$ (γ) 1