Fundação Universidade Federal de Pelotas
Disciplina de Cálculo 1 - Prof. Dr. Maurício Zahn
Cursos 3900, 3910, 6100 e 6400
Lista 03 de Exercícios - Funções trigonométricas. Limites de funções.

1. Esboçar o gráfico de cada função abaixo, indicando domínio, imagem e período.

   a) $f(x) = 1 + 2\sin\left(2x - \dfrac{5\pi}{3}\right)$

   b) $f(x) = \cos\dfrac{x}{2}$

   c) $f(x) = \tan\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$

   d) $f(x) = \csc\left(\dfrac{\pi}{4} - 2x\right)$

   e) $f(x) = |1 - 2\cos x|$

2. Sejam as funções $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ e $g : (0, \frac{\pi}{2}) \to (0, +\infty)$ dadas respectivamente por

$$f(x) = \sqrt{1 - \frac{1}{e^x}}$$
$$g(x) = 2\ln\csc x$$

   Construa o gráfico de $h = f \circ g$, indicando domínio e imagem. h é periódica? h é bijetiva?

3. Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = 2x - \dfrac{4\pi}{3}$ e $g(x) = 1 + 2\sin x$. Esboçar o gráfico de $g \circ f$, indicando domínio e imagem.

4. Usando a definição de limite, prove que

   (a) $\lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4$ (b) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{1}{3}$ (c) $\lim\limits_{x\to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$, $a > 0$ (d) $\lim\limits_{x\to 0} x \operatorname{sen}\dfrac{1}{x} = 0.$

5. Mostre que se $\lim\limits_{x\to 3} x f(x) = 12$, então existe $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ e é igual a 4.

6. Dê um exemplo em que $\lim\limits_{x\to 0}(f(x) + g(x))$ existe mas nem $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ e nem $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ existem.

7. Use a propriedade do limite de um quociente visto em aula para provar que se $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existir e for diferente de zero, então

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to a} f(x)}.$$

8. Considere a *função de Dirichlet* $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ se } x \text{ for racional} \\ 0, \text{ se } x \text{ for irracional} \end{cases}$$

   Afirmamos que $\forall a \in [0, 1]$, $\nexists \lim\limits_{x\to a} f(x)$. Por quê?

9. Calcule cada limite a seguir, se existir[1]:

(a) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^3-27}{x-3}$ (b) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-1}{x^2+3x+2}$ (c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x^2-4x+1}{x^2+5x-6}$

(d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$ (e) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^2-(a+1)x+a}{x^3-a^3}$ (f) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^n-a^n}{x-a}$

(g) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$ (h) $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$ (i) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$

(j) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$ (k) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$ (ℓ) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{1-\sqrt{x+3}}{\sqrt{x^2+x-1}-1}$

(m) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x+7}-2}{x^2-1}$ (n) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x^2-3}-\sqrt{x-1}}{x^2-4}$ (o) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{1-x}}{x^2-3x+2}$

[1] Respostas:
(a) 27 (b) -2 (c) $\frac{2}{7}$ (d) $\frac{1}{2}$ (e) $\frac{a-1}{3a^2}$ (f) na^{n-1} (g) $\frac{1}{4}$ (h) $-\frac{1}{56}$ (i) $\frac{1}{4}$ (j) $-\frac{1}{3}$ (k) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$
(ℓ) $\frac{1}{3}$ (m) $\frac{1}{24}$ (n) $\frac{1}{4}$ (o)