Fundação Universidade Federal de Pelotas
Disciplina de Cálculo 1 - Prof. Dr. Maurício Zahn
Cursos 3900, 3910, 6100 e 6400
Lista 03 de Exercícios - Funções trigonométricas. Limites de funções.

1. Esboçar o gráfico de cada função abaixo, indicando domínio, imagem e período.

   a) $f(x) = 1 + 2\sin\left(2x - \dfrac{5\pi}{3}\right)$

   b) $f(x) = \cos\dfrac{x}{2}$

   c) $f(x) = \tan\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$

   d) $f(x) = \csc\left(\dfrac{\pi}{4} - 2x\right)$

   e) $f(x) = |1 - 2\cos x|$

   f) $f(x) = 1 - 2\sec\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$

2. Sejam as funções $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ e $g : (0, \frac{\pi}{2}) \to (0, +\infty)$ dadas respectivamente por

$$f(x) = \sqrt{1 - \frac{1}{e^x}}$$

$$g(x) = 2\ln\csc x$$

   Construa o gráfico de $h = f \circ g$, indicando domínio e imagem. h é periódica? h é bijetiva?

3. Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = 2x - \dfrac{4\pi}{3}$ e $g(x) = 1 + 2\sin x$. Esboçar o gráfico de $g \circ f$, indicando domínio e imagem.

4. Usando a definição de limite, prove que

   (a) $\lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4$ (b) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{1}{3}$ (c) $\lim\limits_{x\to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$, $a > 0$ (d) $\lim\limits_{x\to 0} x \operatorname{sen}\dfrac{1}{x} = 0.$

5. Mostre que se $\lim\limits_{x\to 3} xf(x) = 12$, então existe $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ e é igual a 4.

6. Dê um exemplo em que $\lim\limits_{x\to 0}(f(x) + g(x))$ existe mas nem $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ e nem $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ existem.

7. Use a propriedade do limite de um quociente visto em aula para provar que se $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existir e for diferente de zero, então

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to a} f(x)}.$$

8. Considere a *função de Dirichlet* $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ se } x \text{ for racional} \\ 0, \text{ se } x \text{ for irracional} \end{cases}$$

   Afirmamos que $\forall a \in [0, 1]$, $\nexists \lim\limits_{x\to a} f(x)$. Por quê?

9. Calcule cada limite a seguir, se existir[1]:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{x^3-27}{x-3}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x^2+3x+2}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-4x+1}{x^2+5x-6}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$ (e) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{x^2-(a+1)x+a}{x^3-a^3}$ (f) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}$

(g) $\displaystyle\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$ (h) $\displaystyle\lim_{x\to 7}\frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$ (i) $\displaystyle\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$

(j) $\displaystyle\lim_{x\to 4}\frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$ (k) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$ (ℓ) $\displaystyle\lim_{x\to -2}\frac{1-\sqrt{x+3}}{\sqrt{x^2+x-1}-1}$

(m) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x+7}-2}{x^2-1}$ (n) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[4]{x^2-3}-\sqrt[4]{x-1}}{x^2-4}$ (o) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{3x^2-4x+11}{1-x-5x^2}$

(p) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty}\frac{4x^3-7x+2}{2x^2-14x+8}$ (q) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{3x^2-5x+11}{1-7x}$ (r) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty}\frac{3x^4-4x^3+2}{3-5x^3-2x^7}$

(s) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$ (t) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\sqrt{x^2-5x+6}-x$ (u) $\displaystyle\lim_{x\to 2^+}\frac{x}{x-2}$

(v) $\displaystyle\lim_{x\to \frac{1}{3}^-}\frac{2+x}{3x-1}$ (x) $\displaystyle\lim_{x\to 1^-}\frac{x-1}{|x-1|}$ (y) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\sqrt{x+a}-\sqrt{x}$

10. Esboce o gráfico da função $f(x)=1-\tan\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$, indicando domínio e imagem. Pelo gráfico, o que se conclui quanto aos limites $\displaystyle\lim_{x\to \frac{5\pi}{12}^+} f(x)$ e $\displaystyle\lim_{x\to \frac{5\pi}{12}^-} f(x)$?

11. Supondo que vale a seguinte cadeia de desigualdades

$$1-\frac{x^2}{2}\le \cos x\le 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4},$$

prove que $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}=0$.

12. Seja f uma função tal que para todo $x\neq 0$, $-x^2+3x\le f(x)<\dfrac{x^2-1}{x-1}$. Calcule $\displaystyle\lim_{x\to 1} f(x)$ e justifique.

13. Suponha que para todo x, $|g(x)|\le x^4$. Calcule $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x}$.

14. Dada a função f em cada item, faça o seu esboço gráfico e ache o limite indicado, justificando sua existência ou não.

(a) $f(x)=\begin{cases} x^2, \text{ se } x\le 2\\ 8-2x, \text{ se } x>2.\end{cases}$ (i) $\displaystyle\lim_{x\to 2^-} f(x)$, (ii) $\displaystyle\lim_{x\to 2^+} f(x)$, (iii) $\displaystyle\lim_{x\to 2} f(x)$.

(b) $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$. (i) $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} f(x)$, (ii) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x)$, (iii) $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)$.

[1] Respostas:
(a) 27 (b) -2 (c) $\frac{2}{7}$ (d) $\frac{1}{2}$ (e) $\frac{a-1}{3a^2}$ (f) na^{n-1} (g) $\frac{1}{4}$ (h) $-\frac{1}{56}$ (i) $\frac{1}{4}$ (j) $-\frac{1}{3}$ (k) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$
(ℓ) $\frac{1}{3}$ (m) $\frac{1}{24}$ (n) $\frac{1}{4}$ (o) $-\frac{3}{5}$ (p) $-\infty$ (q) $-\infty$ (r) 0 (s) 0 (t) $-\frac{5}{2}$ (u) $+\infty$ (v) $-\infty$
(x) -1 (y) 0

15. Dada $f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ se } x \leq -2 \\ ax + b, \text{ se } \; -2 < x < 2 \\ 2x - 6, \text{ se } x \geq 2 \end{cases}$, ache os valores de a e b tais que existam os limites $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$.

16. Dados $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3, \text{ se } x \leq 1 \\ x + 1, \text{ se } 1 < x \end{cases}$ e $g(x) = \begin{cases} x^2, \text{ se } x \leq 1 \\ 2, \text{ se } 1 < x \end{cases}$

    (a) Mostre que $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ existem, mas não são iguais e, portanto, $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ não existe.

    (b) Mostre que $\lim\limits_{x \to 1^-} g(x)$ e $\lim\limits_{x \to 1^+} g(x)$ existem, mas não são iguais e, portanto, $\lim\limits_{x \to 1} g(x)$ não existe.

    (c) Ache as fórmulas que definem $f(x)g(x)$.

    (d) Prove que $\lim\limits_{x \to 1} f(x)g(x)$ existe, mostrando que $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)g(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x)g(x)$.