Fundação Universidade Federal de Pelotas
Cursos de Física e Química
Disciplina de Cálculo 3 - Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 07 de Exercícios -Fórmula de Taylor. Integrais múltiplas (primeiros conceitos)

1. Expandir em série de Taylor cada função abaixo, nas vizinhanças de cada ponto P indicado:
   (a) $f(x,y) = \operatorname{sen} xy$; $P(1, \frac{\pi}{2})$.
   (b) $f(x,y) = e^x \operatorname{sen}(x-y)$; $P(0,0)$ [ou seja, pela fórmula de Maclaurin]
   (c) $f(x,y) = \ln(x+y^2)$; $P(2,1)$
   (d) $f(x,y) = \ln(1+xy)$, pela fórmula de Maclaurin.
   (e) $f(x,y) = x \operatorname{sen} y + y \operatorname{sen} x$, pela fórmula de Maclaurin.
   [Resp.: $xy(2 - \frac{x^2+y^2}{3!} + \frac{x^4+y^4}{5!} - \frac{x^6+y^6}{7!} + ...)$]

2. Sejam $A \subset \mathbb{R}^m$ um bloco do $\mathbb{R}^m$, $f : A \to \mathbb{R}$ integrável, e sejam
$$m = \inf\{f(x) : x \in A\} \quad \text{e} \quad M = \sup\{f(x) : x \in A\}.$$
Mostre que
$$m \leq \frac{\int_A f(x)dx}{\operatorname{Vol}(A)} \leq M.$$

3. Adicionando a hipótese no exercício anterior de que f é contínua no bloco A, conclua que existe $c \in A$ tal que[1]
$$\int_A f(x)dx = f(c) \cdot \operatorname{Vol} A.$$

4. Encontre um intervalo fechado que contenha o valor da integral dupla dada em cada caso (**Obs.:** use o exercício 2).
   (a) $\int_R\int (x^2+y^2)dA$, onde R é a região retangular com vértices em $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ e $(0,1)$.
   (b) $\int_R\int e^{xy}dA$, onde R é a região retangular com vértices em $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ e $(0,1)$.
   (c) $\int_A (x+y)e^{yz}dxdydz$, onde A é o bloco $[1,3] \times [0,2] \times [1,4]$.

5. Usando a definção de integral dupla como limite de somas de Riemann, calcule a integral $\int_A f(x,y)dxdy$, sendo:
   (a) $f(x,y) = x + 4y$, e A o bloco $[0,2] \times [0,1]$. (Resp.: 6)
   (b) $f(x,y) = 3x^2 + 2y$, e A o bloco $[0,2] \times [0,1]$. (Resp.: 10)
   (c) $f(x,y) = x^2 + 3y$, e A o bloco $[0,2] \times [1,5]$.

6. Justifique por que a bola fechada $B[a,r] \subset \mathbb{R}^m$ é um conjunto J - mensurável.

[1] usar o Teorema do valor intermediário