Universidade Federal de Pelotas
Cursos de Física e Química
Disciplina de Cálculo 3
Lista 6 de Exercícios - Propriedades do gradiente. Planos tangentes. Extremos relativos e absolutos
Prof. Dr. Maurício Zahn

1. Prove o seguinte teorema:

   Teorema. *Sejam f, g funções de $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ diferenciáveis e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então*

   (i) $\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$;

   (ii) $\nabla(\alpha f) = \alpha \nabla f$;

   (iii) $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$.

2. Seja $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$, e $r = ||\vec{r}||$.

   (a) Mostre que $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$ e $\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}$. Conclua que $\nabla r = \frac{\vec{r}}{r}$.

   (b) Mostre que $\nabla \ln r = \frac{\vec{r}}{r^2}$.

3. Encontre o plano tangente ao gráfico de $f(x,y) = xy^3 + x^2$ no ponto $P(2,-2)$.

4. Obtenha a equação do plano tangente ao gráfico de cada superfície a seguir, nos pontos indicados:

   (a) $x^2 + y^2 + z^2 = 49$, no ponto $P(6,2,3)$ [Resp.: $6x + 2y + 3z - 49 = 0$]

   (b) $f(x,y) = 3xy^3 + x^3$ em $P(2,1)$.

   (c) $f(x,y) = e^{x\cos y}$ em $P(-1, \frac{\pi}{2})$. [Resp.: $y + z = 1 + \frac{\pi}{2}$]

5. Encontre os pontos críticos das funções abaixo:

   (a) $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - 4y + 6x$

   (b) $f(x,y) = x^2 + 4xy - y^2 - 8x - 6y$ [Resp.: $(2,1)$.]

6. Encontre o máximo de $f(x,y) = 2x + y - 3xy$ no quadrado unitário $Q = [0,1] \times [0,1]$.
   [Resp.: O máx. acontece na fronteira de Q e o valor é $f(1,0) = 2$].

7. Classifique os extremos relativos das seguintes funções:

   (a) $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$ na região $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, (x-2)^2 + y^2 \leq 1\}$.
   [Resp.: máx $(1,0)$ e mín $(3,0)$]

   (b) $f(x,y) = x^2 + y^2 + \frac{2\sqrt{2}}{3}$ na elipse $x^2 + 2y^2 \leq 1$.
   [Resp.: máx $(\pm\frac{2}{\sqrt{5}}, \pm\frac{1}{\sqrt{10}})$, min $(0,0)$].

8. Das funções de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ abaixo, classifique os extremos relativos, caso existam:

   (a) $f(x,y) = x\ln(x+y)$.

   (b) $f(x,y) = (x+3y)e^{y-x^2}$.

   (c) $f(x,y) = xye^{-x^2-y^2}$.

   (d) $f(x,y) = x^3 + y^4 - 6x - 2y^2$.

   (e) $f(x,y) = e^x \operatorname{sen} y$.