CÁLCULO 3

29/07/24 – AULA 33

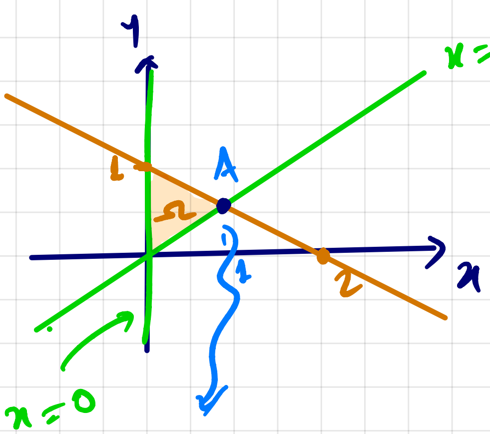
Seguindo nos exemplos do caso geral:

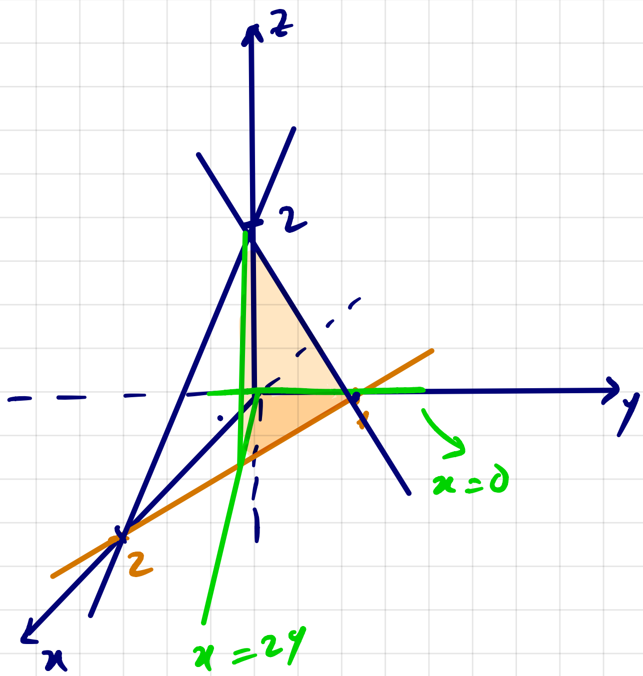
03) Obtenha o volume do tetraedro limitado pelos planos $x+2y+z=2$, $x=2y$, $x=0$ e $z=0$. (Resp: $\frac{1}{3}$).

plano xy

SOLUÇÃO: $z=f(x,y)$

$f(x,y) = 2-x-2y$





$x=0$

$A =$ interseção das retas

$$\begin{cases} x = 2y \text{ e} \\ y = 1 - \frac{1}{2}x \end{cases}$$

$x = 2\cdot\left(1-\frac{1}{2}x\right)$

$x = 2 - x$

$2x = 2 \Rightarrow x = 1$

traço no plano xy:

$z=0$:

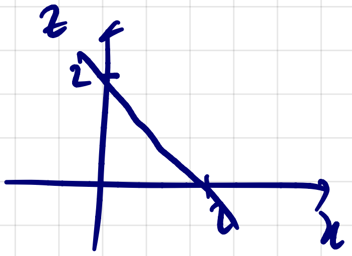
$2-x-2y=0$

$x = 2-2y$

demais

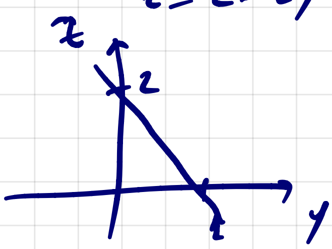
- traços do tetraedro:
  - (plano xz): $y=0$

    $z = 2-x$.

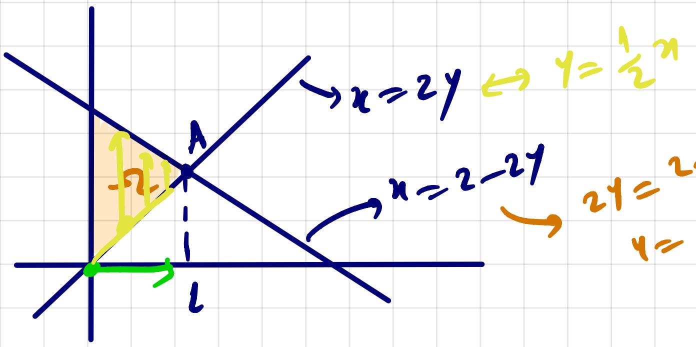


- plano yz: $x=0$

  $z = 2-2y$



A medida do volume V será dada por:



$$V=\iint f(x,y)\,d_A \qquad \text{onde } d_A=dx\,dy \text{ ou } d_A=dy\,dx$$

$$V=\int_{x=0}^{x=1}\left(\int_{y=\frac{1}{2}x}^{y=1-\frac{1}{2}x}(2-x-2y)\,dy\right)dx=\int_{x=0}^{x=1}\left(2y-xy-y^2\right)\Big|_{y=\frac{1}{2}x}^{y=1-\frac{1}{2}x}dx=$$

$$=\int_{x=0}^{x=1} y(2-x-y)\Big|_{y=\frac{x}{2}}^{y=1-\frac{x}{2}}dx=$$

$$=\int_{x=0}^{x=1}\left\{\left(1-\frac{x}{2}\right)\left(2-x-\left[1-\frac{x}{2}\right]\right)-\frac{x}{2}\overbrace{\left(2-x-\frac{x}{2}\right)}^{2-\frac{3x}{2}}\right\}dx$$

$$=\int_0^1\left[\left(1-\frac{x}{2}\right)\left(1-\frac{x}{2}\right)-x+\frac{3x^2}{4}\right]dx=$$

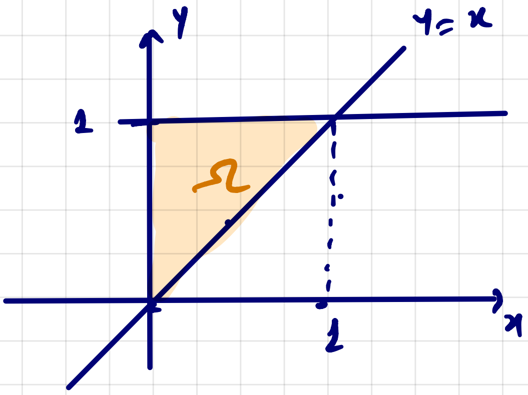
$$=\int_0^1\left(1-x+\frac{x^2}{4}-x+\frac{3x^2}{4}\right)dx=\int_0^1\left(1-2x+x^2\right)dx=$$

$$\left(x-x^2+\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1=\cancel{1}-\cancel{1}+\frac{1}{3}-0=\frac{1}{3} \text{ unidades de volume.}$$

01) Calcule $\int_0^1 \int_x^1 \operatorname{sen} y^2 \, dy \, dx$

Solução:

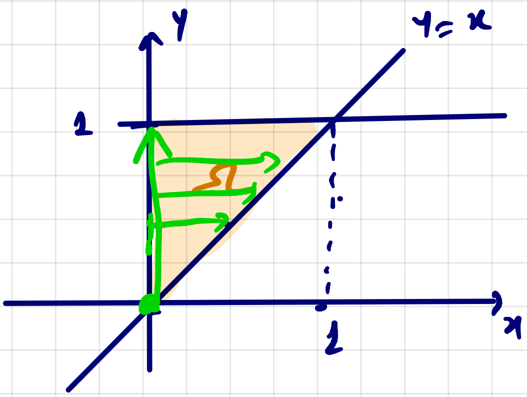
$$\int_{x=0}^{x=1} \int_{y=x}^{y=1} \operatorname{sen} y^2 \, dy . dx$$



Note que olhando a integral indefinida mais interna,

$$\int \operatorname{sen} y^2 dy,$$

não é possível obter uma antiderivada. Quando acontece isso, a saída é mudar a ordem de integração. E, quando mudamos a ordem de integração, os limites de integração também mudarão. Vejamos:



$$\int_{x=0}^{x=1} \int_{y=x}^{y=1} \operatorname{sen} y^2 \, dy . dx = \int_{y=0}^{y=1} \int_{x=0}^{x=y} \underbrace{\operatorname{sen} y^2}_{\text{const.}} . dx \, dy$$

do

$$= \int_{y=0}^{y=1} \operatorname{sen} y^2 \int_{x=0}^{x=y} dx \, dy = \int_{y=0}^{y=1} \operatorname{sen} y^2 . \left. x \right|_{x=0}^{x=y} . dy =$$

$$= \int_{y=0}^{y=1} \operatorname{sen} y^2 . y \, dy = \frac{1}{2} \int_0^1 \operatorname{sen} y^2 (2y \, dy) = -\frac{1}{2} \cos y^2 \Big|_0^1 =$$

$$u = y^2 \Rightarrow du = 2y\,dy$$

$$= -\frac{1}{2}\cos 1 + \frac{1}{2}\underbrace{\cos 0}_{=1} = \frac{1}{2}(1-\cos 1)$$

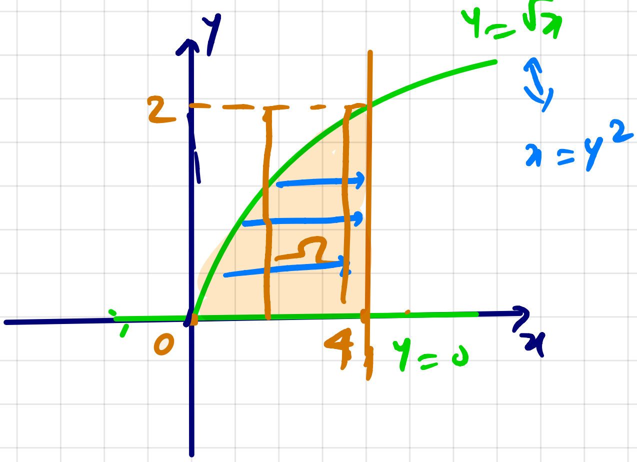
05) Esboce a região de integração e faça mudança de ordem de integração para:

$$\int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy\,dx$$

Solução: Desenhando a região Ω:

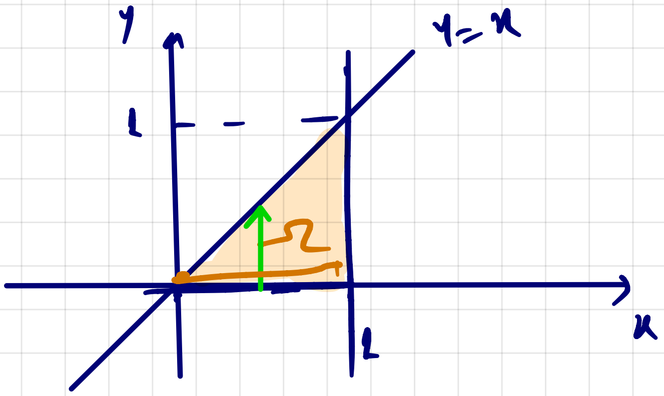
$$\int_{x=0}^{x=4} \int_{y=0}^{y=\sqrt{x}} f(x,y)\,dy\,dx =$$

$$= \int_{y=0}^{y=2} \int_{x=0}^{x=y^2} f(x,y)\,.dx\,dy$$



06) Calcule $\displaystyle\int_0^1 \int_y^1 \sqrt{1+x^2}\,dx\,dy$.

Solução: $$\int_{y=0}^{y=1}\int_{x=y}^{x=1} \sqrt{1+x^2}\,dx\,dy = \int_{x=0}^{x=1}\int_{y=0}^{y=x} \underbrace{\sqrt{1+x^2}}_{\text{const.}}\,dy\,dx =$$



$$= \int_{x=0}^{x=1}\sqrt{1+x^2}\cdot\int_{y=0}^{y=x} 1\,dy\,dx =$$

$$= \int_{x=0}^{x=1}\sqrt{1+x^2}\cdot y\Big|_{y=0}^{y=x}\,dx =$$

$$= \int_{x=0}^{x=1}\sqrt{1+x^2}\cdot x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (1+x^2)^{1/2}\,2x\,dx =$$

$\int u^r\,du$

$u = 1+x^2 \to du = 2x\,dx$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{(1+x^2)^{3/2}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3}\cdot(1+x^2)^{3/2}\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{3}\left[(1+1)^{3/2} - (1+0)^{3/2}\right] = \frac{1}{3}\cdot\left[\sqrt{2^3} - \sqrt{1^3}\right]$$

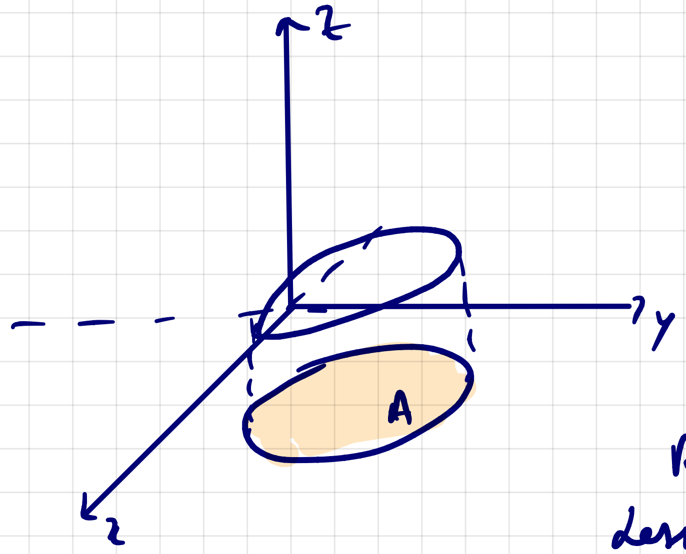
$$= \frac{1}{3}\left[2\sqrt{2} - 1\right].$$

ÁREA DE UMA REGIÃO VIA INTEGRAL DUPLA:

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, onde Ω é um conj. J-mensurável. Então, a medida da área A dessa região é dada por:

$$A = \iint_{\Omega} dx\,dy$$

De fato: considere $f(x,y) = 1$ em Ω.



- temos um cilindro de base Ω e altura 1.

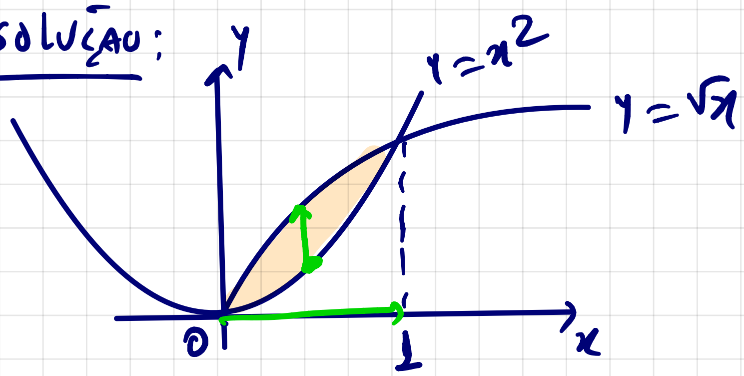
A medida do volume desse cilindro será:

$$V = \iint_{\Omega} 1 .\, dx\,dy = \underbrace{A}_{\text{ÁREA DE } \Omega.} . 1$$

V é numericamente igual a A.

Ex: Ache a área entre as curvas $y=\sqrt{x}$ e $y=x^2$ via integrais duplas.

SOLUÇÃO:



INTERCEPTO:

$y=y$

$\sqrt{x}=x^2$

$x=x^4$

$x^4-x=0$

$x(x^3-1)=0$

$\begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$

Então a medida da área A da região compreendida entre as curvas será:

$$A=\iint_{\Omega} 1\,dx\,dy=\int_{x=0}^{x=1}\int_{y=x^2}^{y=\sqrt{x}} dy\,dx=\int_{x=0}^{x=1} y\Big|_{y=x^2}^{y=\sqrt{x}}\,dx$$

$$=\int_{x=0}^{x=1}(\sqrt{x}-x^2)\,dx=\int_0^1\left(x^{1/2}-x^2\right)dx=\left(\frac{2}{3}x^{3/2}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1$$

$$=\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}-0\right)=\frac{1}{3}$$ unidades de área

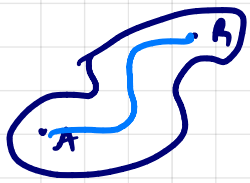
TEOREMA DA MÉDIA: Seja $f: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função contínua definida em um conjunto Ω compacto e convexo. Então, $\exists\ (\alpha, \beta) \in \Omega$ tal que

$$\iint_{\Omega} f(x,y)\, d_A = A \cdot f(\alpha, \beta),$$ onde

A é a medida da área da região Ω.

Obs.: Lembre-se:

- COMPACTO = LIMITADO E FECHADO
- CONEXO = dados 2 pontos quaisquer no conj. é possível ligá-los por uma curva ou linha poligonal inteiramente contida no conj.



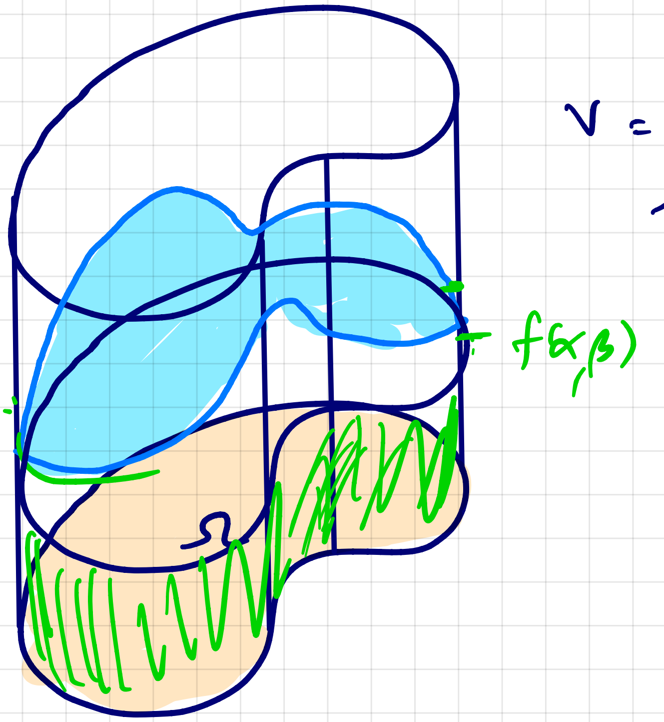
No caso, $f(\alpha, \beta)$ chama-se VALOR MÉDIO da função f em Ω.

INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA: CONSIDERE UM "CILINDRO DE BASE SENDO A REGIÃO Ω E CONSIDERE $z = f(x,y) \geq 0$ (PARA DAR SENTIDO DE VOLUME), DEFINIDO EM Ω, COMO UM SÓLIDO DENTRO DO CILINDRO, CUJA ALTURA É, OBVIAMENTE IRREGULAR, MAS POSSUINDO UM VOLUME V. AO DERRETÊ-LO, NÃO HAVENDO PERDA DE VOLUME, O VOLUME SERÁ O MESMO, MAS FICANDO NÍVEL DA ÁGUA REGULAR, A ALTURA DO SÓLIDO SERÁ $f(\alpha, \beta)$

POR ISSO, TEREMOS:

$$V = \iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = A \cdot \underbrace{f(\alpha,\beta)}_{\text{ALTURA}}$$

ÁREA DA BASE



Veremos a demonstração na próxima aula.