CÁLCULO 3

24/07/24 – AULA 30

RESOLUÇÃO DE EXERCÍCIOS DA LISTA 6.

2. Seja $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$, e $r = ||\vec{r}||$.

(a) Mostre que $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$ e $\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}$. Conclua que $\nabla r = \frac{\vec{r}}{r}$.

(b) Mostre que $\nabla \ln r = \frac{\vec{r}}{r^2}$.

$$\vec{r} = (x, y) \; ; \; r = ||\vec{r}|| = \sqrt{x^2+y^2} = (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\overset{r(x,y)}{\parallel}$$

(a)
$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{\cancel{2}} (x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot \cancel{2}x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{r}.$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{1}{\cancel{2}} (x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (\cancel{2}y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y}{r}.$$

Assim, temos:

$$\nabla r = \left(\frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial y}\right) = \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}\right) =$$

$$\frac{1}{r} \cdot (x, y) = \frac{1}{r} \cdot \vec{r} = \frac{\vec{r}}{r}$$

(b) Mostre que

$$\nabla \ln r = \frac{\vec{r}}{r^2}.$$

Como $r = r(x,y) = (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$, então

$$\ln r = \ln (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2).$$

LEMBRA-TE:

$\ln a^m = m \cdot \ln a$

Assim, temos:

$$\nabla \ln r = \left(\frac{\partial}{\partial x}(\ln r), \frac{\partial}{\partial y}(\ln r)\right), \text{ onde:}$$

- $$\frac{\partial}{\partial x}(\ln r) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)\right) = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}x}{x^2+y^2}$$

$(\ln w)' = \dfrac{w'}{w}$

$$= \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{x}{r^2}$$

pois $r = \sqrt{x^2+y^2}$

- $$\frac{\partial}{\partial y}(\ln r) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)\right) = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}y}{x^2+y^2}$$

$$= \frac{y}{x^2+y^2} = \frac{y}{r^2}$$

Ou seja, obtemos

$$\nabla \ln r = \left(\frac{x}{r^2}, \frac{y}{r^2}\right) = \frac{1}{r^2}\cdot(x,y) = \frac{\vec{r}}{r^2}.$$

L6 ||

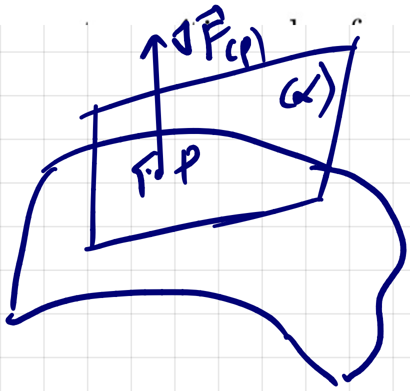
4. Obtenha a equação do plano tangente ao gráfico de cada superfície a seguir, nos pontos indicados:

(a) $x^2 + y^2 + z^2 = 49$, no ponto $P(6, 2, 3)$ [Resp.: $6x + 2y + 3z - 49 = 0$]

(b) $f(x, y) = 3xy^3 + x^3$ em $P(2, 1)$.

(c) $f(x, y) = e^{x \cos y}$ em $P(-1, \frac{\pi}{2})$. [Resp.: $y + z = 1 + \frac{\pi}{2}$]

(c)



Sendo $z = f(x,y)$, escreva

$$F(x,y,z) = f(x,y) - z.$$

$$F(x,y,z) = e^{x\cos y} - z$$

O vetor normal ao plano é dado por $\nabla F(P)$.

$P(-1, \frac{\pi}{2}, f(-1, \frac{\pi}{2}))$ (na superfície F),

onde $f(-1, \frac{\pi}{2}) = e^{-1 \cdot \cos\frac{\pi}{2}} = e^{-\cos\frac{\pi}{2}} = e^0 = 1.$

$$\boxed{P(-1, \frac{\pi}{2}, 1)}$$

$\nabla F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right)$, onde:

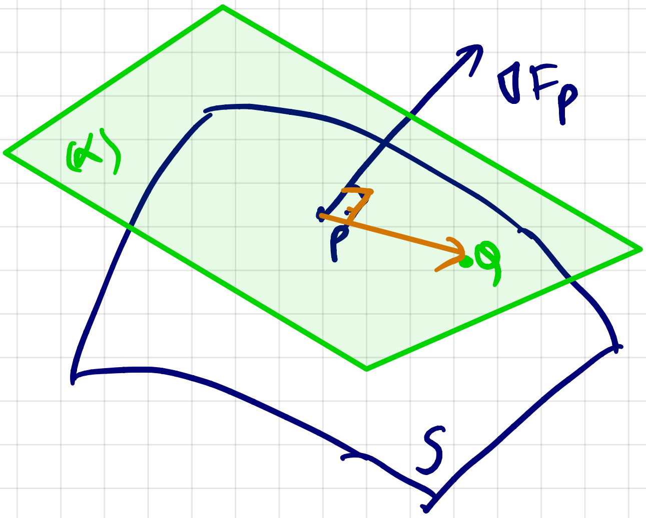
$\frac{\partial F}{\partial x} = \cos y \cdot e^{x\cos y}$; $\frac{\partial F}{\partial y} = e^{x\cos y} \cdot (-x \cdot \operatorname{sen} y)$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = -1.$$

Então, $\nabla F\left(\cos y \cdot e^{x\cos y}, -x \operatorname{sen} y \cdot e^{x\cos y}, -1\right)$

Logo, $\nabla F\Big|_p = \left(\cos\frac{\pi}{2} \cdot e^{-1 \cdot \cos\frac{\pi}{2}}, -(-1)\cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} \cdot e^{-1\cos\frac{\pi}{2}}, -1\right)$

$$\nabla F\Big|_p = \left(0, +1 \cdot 1 \cdot e^0, -1\right) = (0, 1, -1)$$



Dado $Q(x,y,z) \in$ ao plano (α) a ser determinado; então

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \nabla F_p = 0.$$

Logo:

$$(Q-P) \cdot (0, 1, -1) = 0$$

$$\left(x-(-1), y-\frac{\pi}{2}, z-1\right) \cdot (0, 1, -1) = 0$$

$$\underbrace{(x+1)\cdot 0}_{0} + \left(y - \frac{\pi}{2}\right) \cdot 1 + (z-1)\cdot(-1) = 0$$

$$y - \frac{\pi}{2} - z + 1 = 0$$

$$(\alpha): \; y - z + \left(1 - \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

L6)

7. Classifique os extremos relativos das seguintes funções:

(a) $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$ na região $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-2)^2 + y^2 \leq 1\}$.
[Resp.: máx $(1,0)$ e mín $(3,0)$]

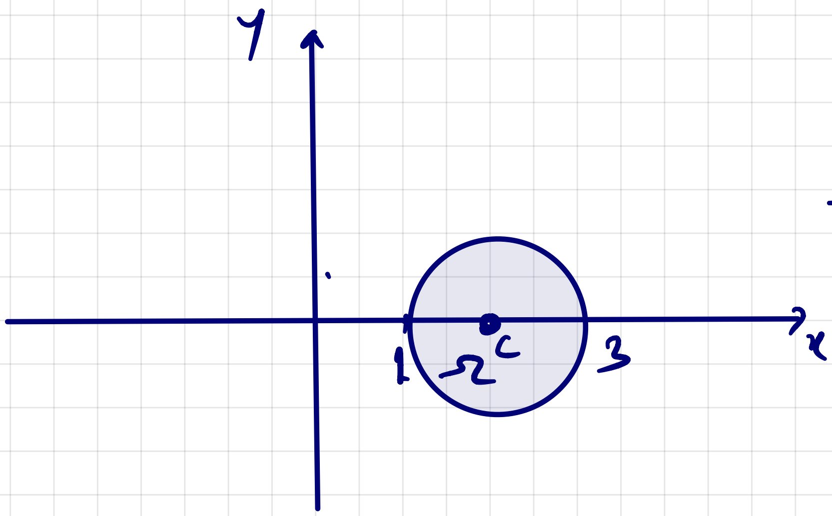
(b) $f(x,y) = x^2 + y^2 + \frac{2\sqrt{2}}{3}$ na elipse $x^2 + 2y^2 \leq 1$.
[Resp.: máx $(\pm\frac{2}{\sqrt{5}}, \pm\frac{1}{\sqrt{10}})$, min $(0,0)$].

(Obs.: REVISITE A 1ª PROPOSIÇÃO APRESENTADA NA AULA 23.)

(a) $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$.

$\Omega = \{(x,y) : (x-2)^2 + y^2 \leq 1\}$ — região interior mais a fronteira da circunf. de raio 1, centrada em $(2,0)$.

$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$
[circunf. centrada em (a,b), e raio $R>0$]



Ω é compacto do $\mathbb{R}^2$.

pontos críticos: onde $\nabla f = 0$, i.e., onde

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad e \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

$$f(x,y) = (x^2+y^2)^{-1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -1 \cdot (x^2+y^2)^{-2} \cdot 2x = -\frac{2x}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -1 \cdot (x^2+y^2)^{-2} \cdot 2y = \frac{-2y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \iff \dfrac{-2x}{x^2+y^2} = 0 \iff x = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \iff \dfrac{-2y}{x^2+y^2} = 0 \iff y = 0. \end{cases}$$

PONTO CRÍTICO: $(0,0) \notin \Omega$.

Logo, f não possui máx/mín. no int(Ω), e como Ω é compacto, os valores de máx/mín., se existirem, vão ocorrer na $\partial\Omega$.

Temos: $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$, com

$$(x-2)^2 + y^2 = 1 \quad (\text{na fronteira}),$$

i.e., $y^2 = 1-(x-2)^2$.

Logo, o problema se transforma em:

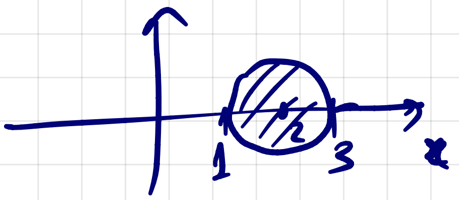
$$g(x) := f(x,y)\Big|_{y^2 = 1-(x-2)^2} = \frac{1}{x^2 + \underbrace{1-(x-2)^2}_{y^2}}$$

$$= \frac{1}{x^2+1-(x^2-4x+4)} = \frac{1}{\cancel{x^2}+1-\cancel{x^2}+4x-4} = \frac{1}{4x-3}$$

$$\Rightarrow g(x) = (4x-3)^{-1}.$$

$$\Rightarrow g'(x) = -1 \cdot (4x-3)^{-2} \cdot 4 = -\frac{4}{(4x-3)^2} < 0.$$

Logo, $g'(x) < 0$, e então, g é uma função decrescente. E como $D(g) = [1,3]$, pois $x=1$ é o menor valor possível para x em Ω e $x=3$ o maior possível:



Então, sendo g decrescente, então o mínimo para g ocorre quando $x=3$ e o máximo quando $x=1$. (e temos $y=0$ para $f(x,y)$).

Conclusão: Máx. $(1,0)$ e Mín $(3,0)$.

L6 ||

8. Das funções de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ abaixo, classifique os extremos relativos, caso existam:

(a) $f(x, y) = x \ln(x + y)$.

pontos críticos: onde $\nabla f = 0$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (0,0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x \cdot \frac{1}{x+y} + 1 \cdot \ln(x+y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x \cdot \frac{1}{x+y}$$

- $\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{x+y} = 0 \Leftrightarrow x = 0$

- $\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{x+y} + \ln(x+y) = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{0}{0+y} + \ln(0+y) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\ln y = 0 \Leftrightarrow y = 1$$

Ponto crítico: $(0, 1)$.

Cálculo da matriz $H(x,y)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{x+y} + \ln(x+y)$$

$$\cdot \ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{(x+y).1 - x.(1)}{(x+y)^2} + \frac{1}{x+y}$$

$$= \frac{\cancel{x}+y-\cancel{x}}{(x+y)^2} + \frac{1}{x+y} = \frac{y + x+y}{(x+y)^2}$$

$$= \frac{x+2y}{(x+y)^2}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{x+y} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{(x+y).0 - x.(1)}{(x+y)^2} = \frac{-x}{(x+y)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{(x+y).1 - x.(1)}{(x+y)^2} = \frac{\cancel{x}+y-\cancel{x}}{(x+y)^2}$$

$$= \frac{y}{(x+y)^2}$$

$$\Rightarrow H(x,y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{x+2y}{(x+y)^2} & \dfrac{y}{(x+y)^2} \\[2ex] \dfrac{y}{(x+y)^2} & \dfrac{-x}{(x+y)^2} \end{pmatrix} .$$

$$\Rightarrow \quad H(0,1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det H(0,1) = 2 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1 < 0 \quad \text{(ponto de sela)}$$
