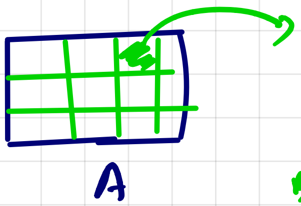
CÁLCULO 3

15/07/24 — AULA 26

Na aula passada iniciamos o estudo de integrais múltiplas, considerando $f: A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma função limitada e $A \subset \mathbb{R}^m$ é um bloco do $\mathbb{R}^m$.

Sendo $P = P_1 \times P_2 \times \cdots \times P_m$ uma partição de um bloco $A \subset \mathbb{R}^m$ e $f: A \to \mathbb{R}$ limitada, então, definimos na aula passada: [PARA ILUSTRAR: SE $A \subset \mathbb{R}^3$ FOSSE UM CUBO MÁGICO, OS CUBINHOS DO CUBO MÁGICO FORMARIAM UMA PARTIÇÃO REGULAR DO MESMO]

$$s(f;P) = \sum_{B \in P} m_B \cdot \mathrm{Vol}(B) \; ; \; S(f;P) = \sum_{B \in P} M_B \cdot \mathrm{Vol}(B)$$



$B \in P$

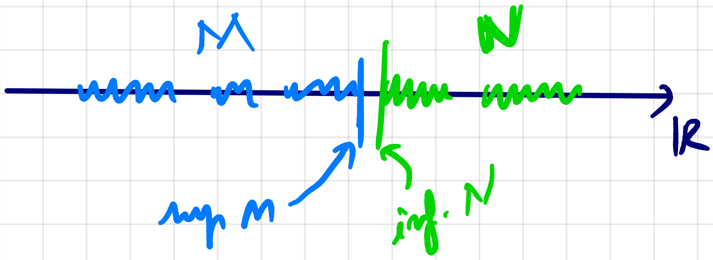
$$\sum_{B \in P} \mathrm{Vol}\, B = \mathrm{Vol}(A)$$

Vimos várias propriedades sobre as somas inferior e superior.

INTEGRAL SUPERIOR E INFERIOR:

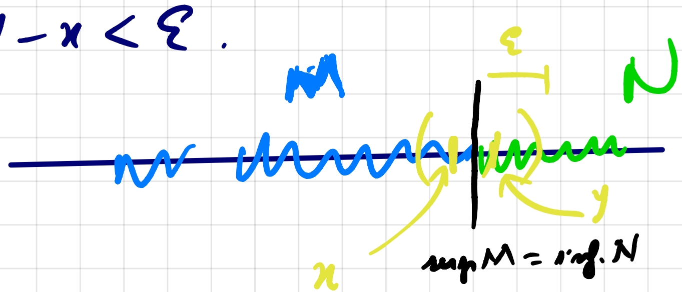
De um resultado de Análise, temos:

Sejam $M, N \subset \mathbb{R}$ conjuntos não vazios de $\mathbb{R}$, tais que, $\forall x \in M$, $\forall y \in N$, $x \leq y$.



Então, $\sup M \leq \inf. N$.

Além disso, $\sup M = \inf. N \iff \forall \varepsilon > 0$, $\exists x \in M$, $\exists y \in N$ tais que $y - x < \varepsilon$.



Isto posto, vamos adaptar este resultado para o nosso estudo, do seguinte modo:

Seja $f: A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma função limitada em um bloco $A \subset \mathbb{R}^m$.

Define $M = \{ s(f;P) : P \text{ é partição de } A \} \subset \mathbb{R}$

$N = \{ S(f;P) : P \text{ é partição de } A \} \subset \mathbb{R}$

Conforme o último resultado discutido na aula passada, qualquer soma inferior é sempre menor ou igual a qualquer soma superior; então,

$\forall x \in M, \quad \forall y \in N, \quad x \leq y.$

Definimos as integrais superior e inferior de f no bloco A, respectivamente, por:

$$\overline{\int_A} f = \inf_{\substack{P \text{ part.} \\ \text{de } A}} S(f;P) \quad = \inf N \quad ,$$

e

$$\underline{\int_A} f = \sup_{\substack{P \text{ part.} \\ \text{de } A}} s(f;P) \quad = \sup M$$

Pelo acima observado,

$\sup M \leq \inf N$ ou seja,

$$\underline{\int_A} f \leq \overline{\int_A} f.$$

Além disso,

$\sup M = \inf N \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in A$ e $\exists y \in B$ tal que $y - x < \varepsilon$.

No nosso caso,

$$\underline{\int_A} f = \overline{\int_A} f \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists P_1, P_2 \text{ partições de } A$$

$$\text{tais que } S(f;P_1) - s(f;P_2) < \varepsilon.$$

Assim, diremos que $f: A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ é <u>integrável</u> no bloco A se, e somente se,

$$\underline{\int_A} f = \overline{\int_A} f,$$

e este valor comum é denotado por $\int_A f$.

Quando $A \subset \mathbb{R}^2$, escrevemos

$$\int_A f = \int_A f(x,y)\,dx\,dy \qquad \text{(NOTAÇÃO)}$$

O que temos acima já é um critério de integrabilidade, porém ele é ruim pois toma duas partições P_1 e P_2. Melhoraremos do seguinte modo:

<u>PROPOSIÇÃO</u> (CRITÉRIO DE INTEGRABILIDADE) Seja $f: A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma função limitada no bloco $A \subset \mathbb{R}^m$. Então, f é integrável no bloco A se, e somente se, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists P$ partição de A tal que

$$S(f;P) - s(f;P) < \varepsilon.$$

DEMONSTR.: Suponha $f: A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ integrável.

Então, dado $\varepsilon > 0$, $\exists P_1, P_2$ partições de A tais que

$$S(f; P_1) - s(f; P_2) < \varepsilon.$$

Seja P um refinamento para P_1 e para P_2.

$$(P = P_1 + P_2)$$

Então, como ao refinar, a soma superior não aumenta e a soma inferior não diminui, temos:

$$s(f; P_2) \leq s(f; P) \leq S(f; P) \leq S(f; P_1)$$

Note que:

$$\underbrace{S(f; P_1) - s(f; P_2)} < \varepsilon, \text{ por hipótese;}$$

e:

$$S(f; P_1) \geq S(f; P)$$

$$+ \quad - s(f; P_2) \geq - s(f; P)$$

$$S(f; P) - s(f; P) \leq \underbrace{S(f; P_1) - s(f; P_2)}_{\text{por hipótese.}} < \varepsilon.$$

$$\Rightarrow S(f;P) - s(f;P) < \varepsilon.$$

Reciprocamente, suponha que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists P$ partição do bloco A tal que

$$S(f;P) - s(f;P) < \varepsilon.$$

Então, em particular, tome $P_1 = P_2 = P$.

Disso,

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists P_1, P_2$ partições (no caso P)

tem que

$$S(f;P_1) - s(f;P_2) < \varepsilon,$$

ou seja, f é integrável.

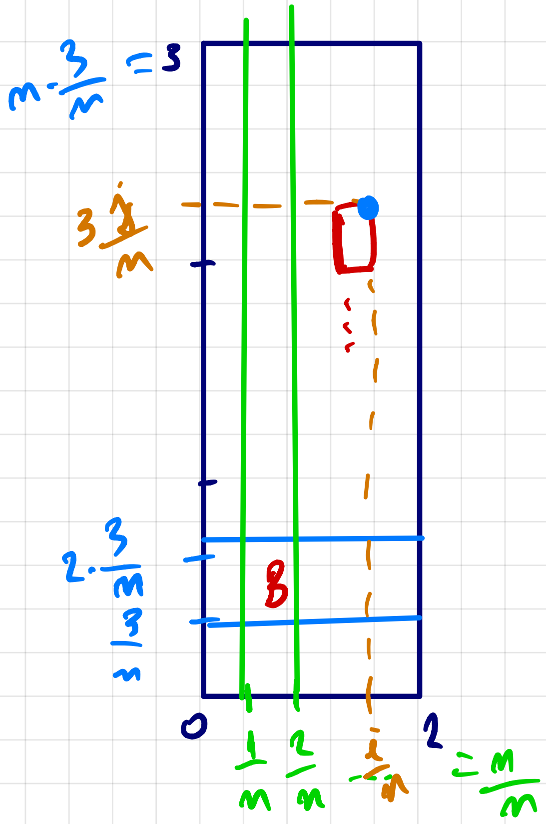
$\square$

Vejamos exemplos:

01) Calcule $\displaystyle\int_A (2x+5y)\,dx\,dy$, sendo A o bloco dado por $A = [0,1] \times [0,3]$.

<u>SOLUÇÃO</u>: Temos $f(x,y) = 2x + 5y$.

Seja P uma partição regular que divide $[0,1] \times [0,3]$ em subblocos B do seguinte modo:



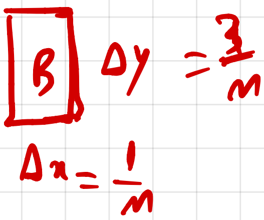
$P = P_1 \times P_2$, onde

P_1 divide $[0,1]$ em n subintervalos de tamanho

$$\Delta x = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n} \quad \text{e}$$

P_2 divide $[0,3]$ em n subintervalos de tamanho

$$\Delta y = \frac{3-0}{n} = \frac{3}{n}$$

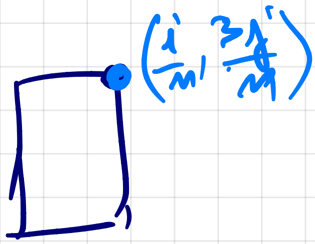


O volume de cada um desses blocos será:

$$\mathrm{vol}(B) = \Delta x \cdot \Delta y = \frac{1}{n} \cdot \frac{3}{n} = \frac{3}{n^2}$$

$f(x,y) = 2x + 5y$ é crescente em A, então

o sup f ocorre no canto superior direito de cada subbloco B.



Ou seja,

$$\underbrace{M_B}_{\sup} = f(x,y)\Big|_{\substack{x=\frac{i}{n} \\ y=\frac{3j}{n}}} = (2x+5y)\Big|_{\substack{x=\frac{i}{n} \\ y=\frac{3j}{n}}} = \frac{2i}{n} + \frac{15j}{n}$$

Disso, montamos:

$$S(f;P) = \sum_{B\in P} M_B \cdot \underbrace{Vol(B)}_{\frac{3}{n^2}} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{2i}{n} + \frac{15j}{n}\right)\frac{3}{n^2} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{6i}{n^3} + \frac{45j}{n^3}\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{6i}{n^3} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{45j}{n^3}$$

$$= \frac{6}{n^3}\cdot\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} i + \frac{45}{n^3}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} j =$$

$$= \frac{6}{n^3}\cdot\sum_{i=1}^{n} i\cdot\underbrace{\sum_{j=1}^{n} 1} + \frac{45}{n^3}\cdot\underbrace{\sum_{i=1}^{n} 1}\cdot\sum_{j=1}^{n} j$$

$$\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{n\ \text{adições}}$$

$$= \frac{6}{\cancel{n^3}_{2}}\left(\sum_{i=1}^{n} i\right)\cdot\cancel{n} + \frac{45}{\cancel{n^3}_{2}}\cdot\cancel{n}\cdot\sum_{j=1}^{n} j$$

$$= \frac{6}{n^2}\cdot\underbrace{\sum_{i=1}^{n} i}_{\substack{\parallel \\ 1+2+\cdots+n}} + \frac{45}{n^2}\cdot\underbrace{\sum_{j=1}^{n} j}_{1+2+\cdots+n} =$$

$$\boxed{\text{Lembre:} \quad 1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{6}{n^{\cancel{2}}} \cdot \frac{\cancel{n}(n+1)}{2} + \frac{45}{n^{\cancel{2}}} \cdot \frac{\cancel{n}(n+1)}{2} =$$

$$= \frac{6}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right) + \frac{45}{2} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right) = \frac{51}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

$$= \frac{51}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

Ou seja, obtemos:

$$S(f;P) = \frac{51}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Ao refinarmos a partição P, o n tenderá ao infinito, e disso, obtemos:

$$\overline{\int_A} f = \lim_{n \to \infty} S(f;P) =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{51}{2}\left(1 + \underbrace{\frac{1}{n}}_{\downarrow}\right) = \frac{51}{2}$$

1

Analogamente se mostra que

$$\underline{\int_A} f = \frac{51}{2}.$$

Portanto, f é integrável, e

$$\int_{\overline{A}} f = \frac{51}{2}.$$

Obs.1 Resultados sobre somatórios que são usados nestes tipos de problemas:

01) $\sum_{i=1}^{n} 1 = n.$

02) $\sum_{i=1}^{n} i = 1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

03) $\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2+2^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

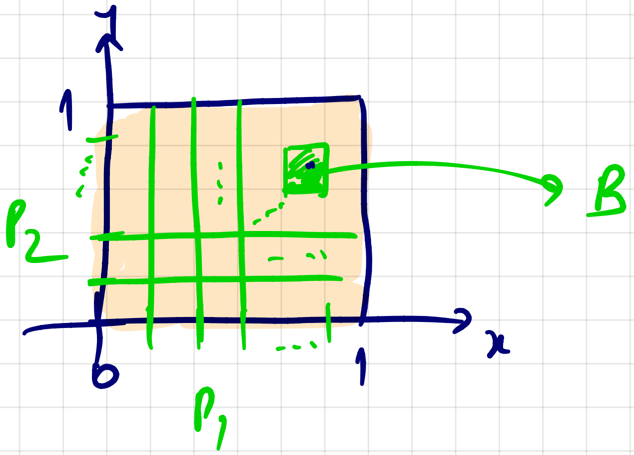
04) $\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3+2^3+\cdots+n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

02) $f: A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por , onde $A = [0,1] \times [0,1]$

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{se } x, y \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \text{ ou } y \notin \mathbb{Q}. \end{cases},$$

uma variante da função de DIRICHLET.

Seja $P = P_1 \times P_2$ uma partição regular de A.



Neste caso, $\forall$ B subbloco do bloco A, vão existir pontos (x, y) com coordenadas racionais e irracionais, devido à densidade dos racionais e irracionais em $\mathbb{R}$.

Dessa forma, $\forall$ B subbloco de A, teremos:

$$m_B = 0 \quad \text{e} \quad M_B = 1.$$

Logo, tem-se que:

$$\underset{\sim}{S(f,P)} = \sum_{B \in P} \underbrace{M_B}_{=1} \cdot \text{Vol}(B) = \sum_{B \in P} \text{Vol}(B) =$$

$$= \text{Vol}(A) = \text{área do bloco } A = (1)^2 = 1.$$

e

$$s(f;P) = \sum_{B \in P} \underbrace{m_B}_{0} \cdot \text{Vol}(B) = 0.$$

Então, por exemplo, se $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0$, temos, $\forall P$ partição:

$$S(f;P) - s(f;P) = 1 - 0 = 1 > \varepsilon.$$

Logo, f não é integrável.