CÁLCULO 3

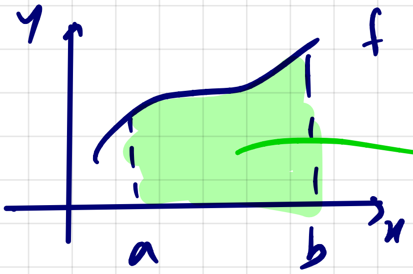
12/07/24 – AULA 25

CAPÍTULO IV – INTEGRAIS MÚLTIPLAS

PRELIMINARES: Queremos dar sentido para cálculo de

$\int_\Omega f$, onde $f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$. (integral definida).

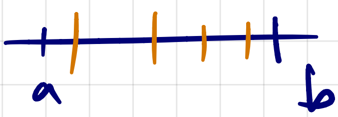
Para isso, precisamos adaptar/extender os resultados trabalhados no CÁLCULO 2, no que diz respeito à integração. A primeira dificuldade a ser observada é que no cálculo a 1 variável, (e considere, por simplicidade, $f \geq 0$), então:



$\int_{[a,b]} f$:= ÁREA ABAIXO DO GRÁFICO DE f.

Para isso, faz-se uma partição P de $[a,b]$, e monta-se uma soma de RIEMANN da f em $[a,b]$. O limite dessa soma com n (n = número de subintervalos da partição P) tendendo ao infinito, vamos obter

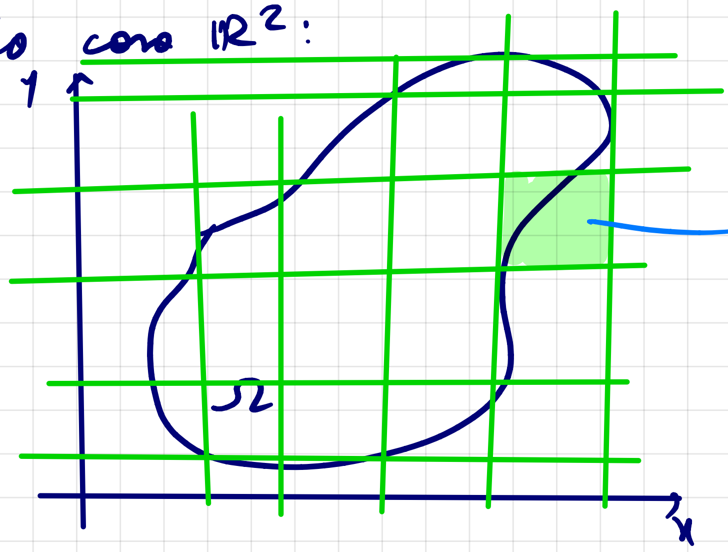
$$\int_{[a,b]} f = \lim_{n \to \infty} \underbrace{S(f;P)}_{\text{SOMA DE RIEMANN}}$$



No entanto quando temos $f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ a dificuldade aumenta, pois a partição da região Ω

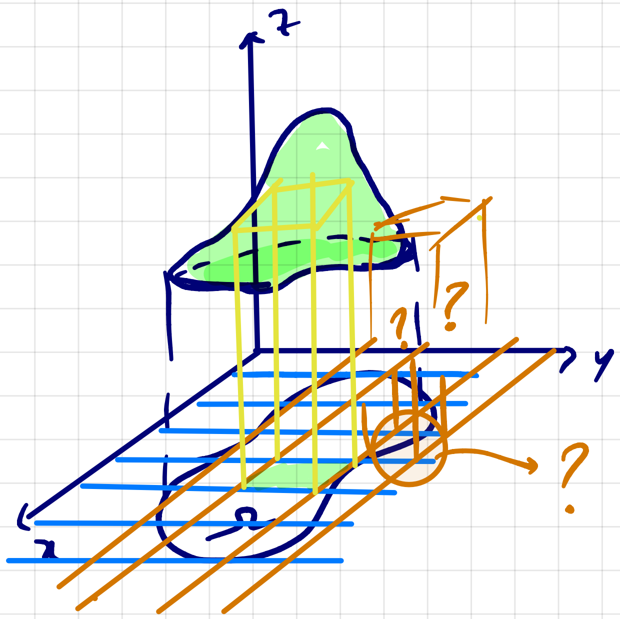
será uma grade na qual algumas divisões da grade não ficarão inteiramente contidas em Ω:

No caso $\mathbb{R}^2$:



por exemplo, esta subdivisão da partição (grade) não fica inteiramente contida em Ω.

Como montar uma soma de Riemann nestes casos?



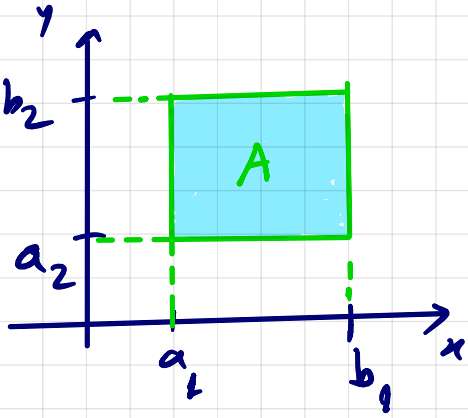
Por esta razão, inicialmente estuda-se $\int_\Omega f$ onde Ω é um <u>BLOCO</u> do $\mathbb{R}^m$; c.f. a definição que segue:

<u>Def.</u>: Um bloco $A \subset \mathbb{R}^m$ é um conjunto definido por

$$A = \prod_{i=1}^{m} [a_i, b_i] := [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_m, b_m].$$

Ex: em $\mathbb{R}^2$: um bloco A é do tipo:

$$A = \prod_{i=1}^{2} [a_i, b_i] = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$$



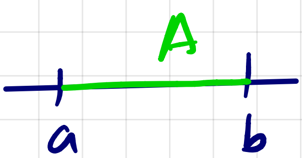
Observe que: em $\mathbb{R}$ um bloco é um intervalo; em $\mathbb{R}^2$ um bloco é um retângulo. Já em $\mathbb{R}^3$ um bloco é um paralelepípedo.

O volume de um bloco A é definido pelo produto de suas dimensões. Ou seja,

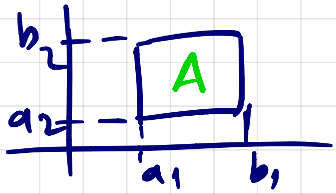
$$Vol(A) = \prod_{i=1}^{m} (b_i - a_i) =$$

$$= (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2) \cdot \ldots \cdot (b_m - a_m)$$

Por exemplo:

- em $\mathbb{R}$:  . $Vol(A) = b - a =$ medida do comprimento.

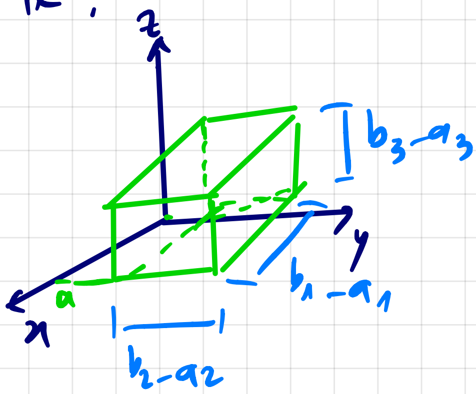
• em $\mathbb{R}^2$:



$$vol(A) = (b_1 - a_1)\cdot(b_2 - a_2)$$

= área do retângulo.

• em $\mathbb{R}^3$:



$$vol(A) = (b_1 - a_1)\cdot(b_2 - a_2)\cdot(b_3 - a_3)$$

= volume do paralelepípedo.

Def: Uma partição de um bloco $A \subset \mathbb{R}^m$ é um conjunto P definido por

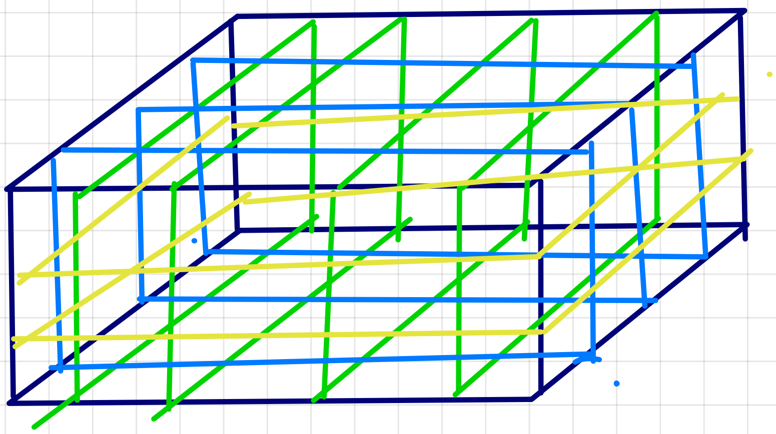
$$P = P_1 \times P_2 \times P_3 \times \cdots \times P_m ,$$ onde:

P_1 : é partição de $[a_1, b_1]$

P_2 : é partição de $[a_2, b_2]$

$\vdots$

P_m : é partição de $[a_m, b_m]$



$A \subset \mathbb{R}^3$.

1º exemplo (caso regular: CUBO MÁGICO)

PARTIÇÃO REGULAR NAS 3 DIMENSÕES.

Uma partição P de um bloco A determina no mesmo sub-blocos $B \in P$, e, tem que

$$Vol(A) = \sum_{B \in P} vol(B)$$

<u>Def.:</u> Dizemos que uma função $f: A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ definida no bloco A do $\mathbb{R}^m$ é LIMITADA se, e somente se, $\exists\, M > 0$ tal que

$$|f(x)| \leq M \quad , \quad \forall x \in A.$$

(lembre: $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$)

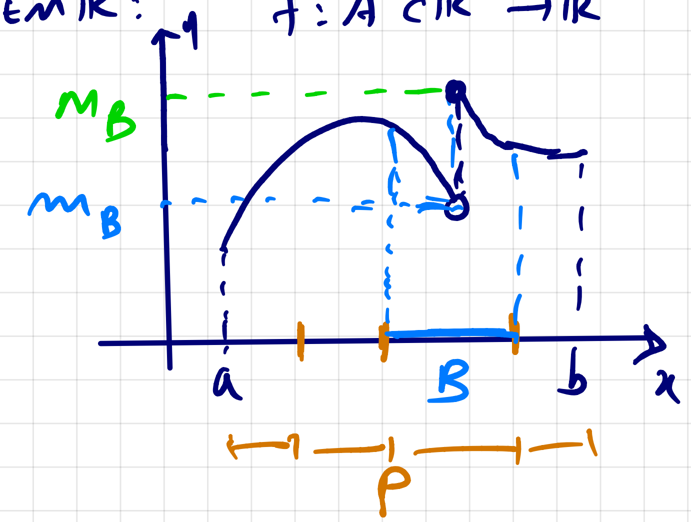
<u>Def.:</u> Seja $f: A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma função limitada no bloco A. Dada P uma partição de A, determinando sub-blocos $B \in P$, definimos o ínfimo e o supremo de f em cada sub-bloco, por; respectivamente:

$$m_B = \inf_{x \in B} f(x) \quad ; \quad M_B = \sup_{x \in B} f(x).$$

min $\qquad$ máx.

Ex.:

Em $\mathbb{R}$: $f: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



$m_B = \inf_{x \in B} f(x)$

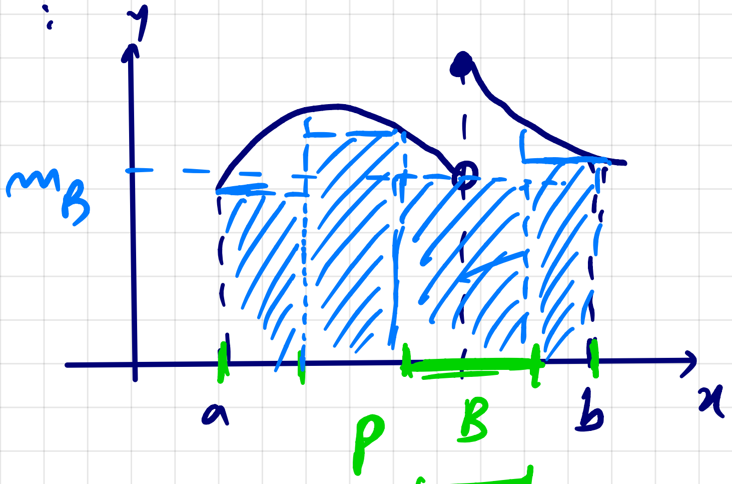
$M_B = \sup_{x \in B} f(x)$

Isto posto, podemos definir os conceitos de soma superior e soma inferior:

<u>Def.:</u> Seja $f: A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma função limitada num bloco $A \subset \mathbb{R}^m$. Definimos as somas superior e inferior de f, em relação a uma partição P de A, respectivamente, por:

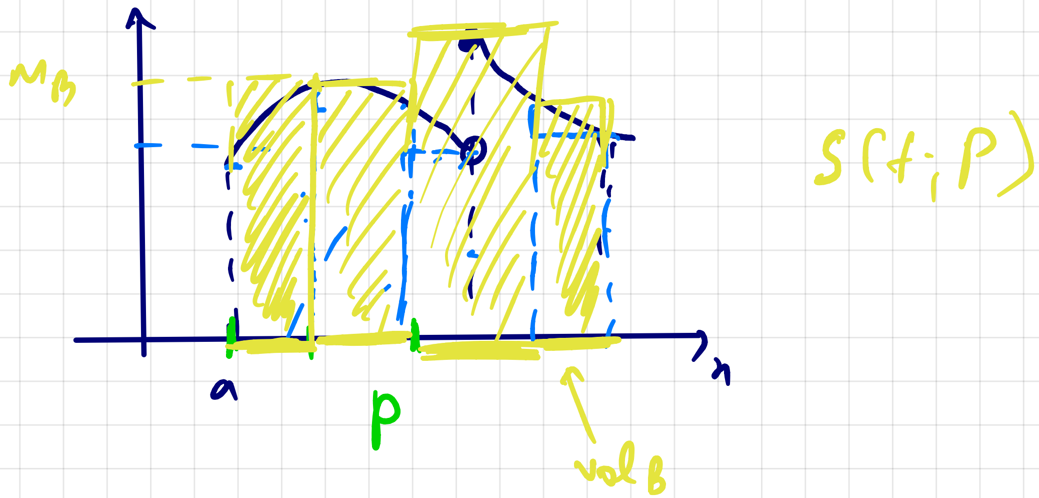
$$S(f;P) = \sum_{B \in P} M_B \cdot \mathrm{Vol}(B) \quad \text{e} \quad s(f;P) = \sum_{B \in P} m_B \cdot \mathrm{Vol}(B)$$

Em $\mathbb{R}$:



$s(f;P)$

$\mathrm{Vol}(B)$ = comprim. do intervalo.



Se $f \geq 0$ no bloco A, então, $s(f;P)$ será uma aproximação de soma de Riemann (área, volume, dependendo da dimensão) por falta, e $S(f;P)$ será uma aproximação da soma de Riemann por excesso.

LEMA: Seja $f : A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma função limitada em um bloco $A \subset \mathbb{R}^m$. Seja P uma partição desse bloco, determinando subblocos $B \in P$. Então,

$$s(f;P) \leq S(f;P)$$

DEMONSTR.: De fato, tem-se que

$$m_B \leq M_B \quad , \forall B \in P.$$

Como $Vol(B) \geq 0$, então

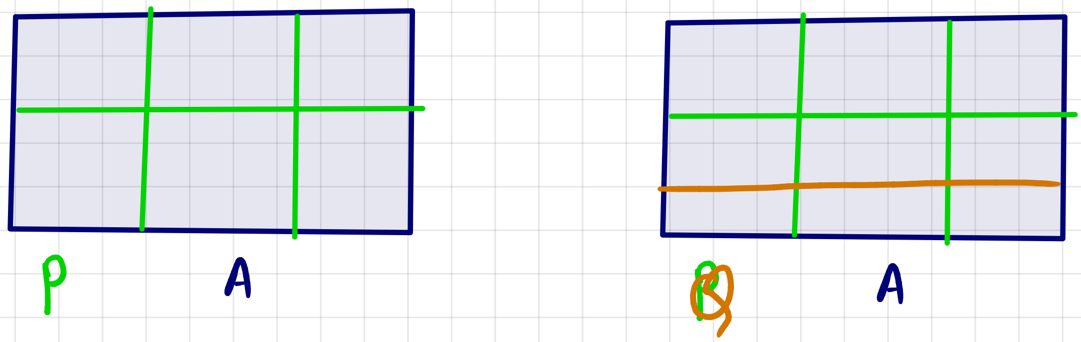
$$m_B \cdot Vol(B) \leq M_B \cdot Vol(B).$$

Somando sob todos os subblocos, vamos obter:

$$\underbrace{\sum_{B\in P} m_B \cdot \mathrm{Vol}(B)}_{= s(f;P)} \le \underbrace{\sum_{B\in P} M_B \cdot \mathrm{Vol}(B)}_{= S(f;P)}$$

Ou seja; $s(f;P) \le S(f;P)$. $\square$

Def.: Seja A um bloco do $\mathbb{R}^m$, e sejam P e Q duas partições do bloco A. Dizemos que Q é um REFINAMENTO da partição P, se $Q \subset P$.



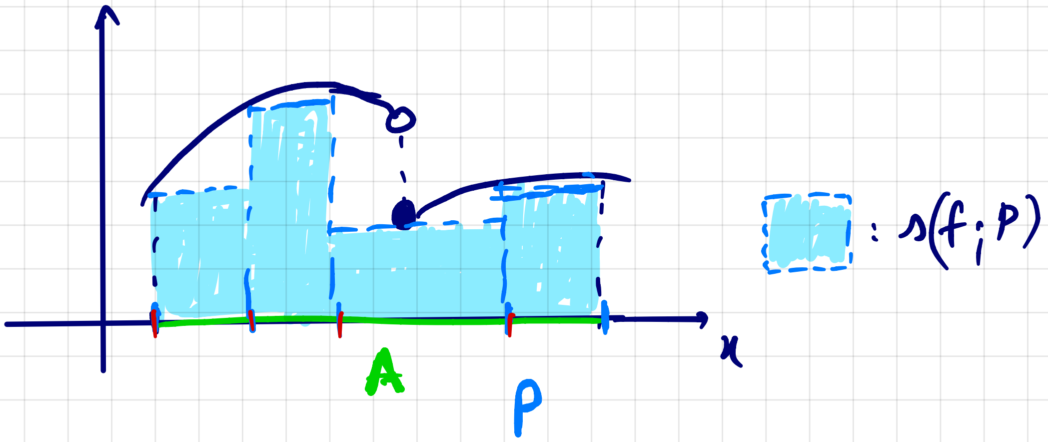
Neste caso, dizemos que Q é mais fina do que P.

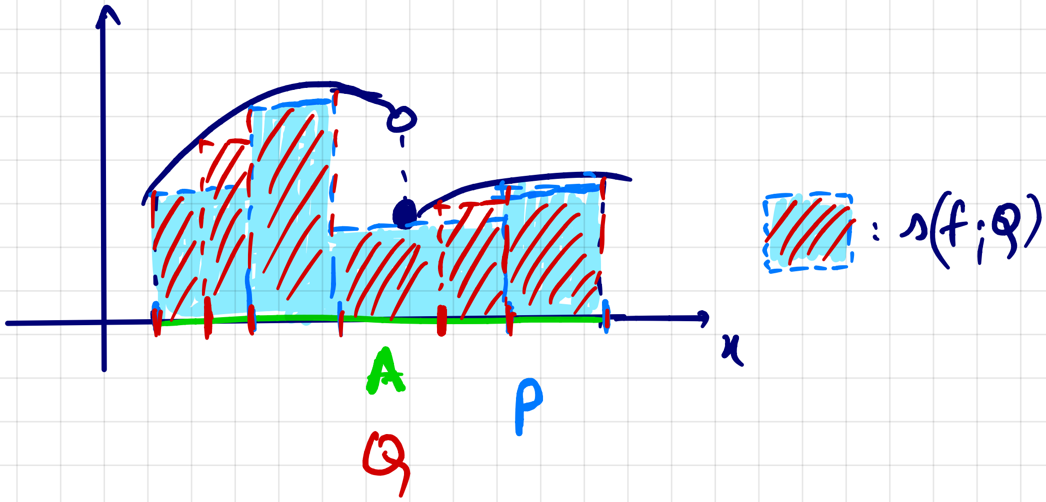
PROP.: Seja $f: A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma função limitada no bloco A e sejam P e Q partições de A, tal que Q é um refinamento de P (i.e.; $Q \subset P$). Então:

$$s(f;P) \le s(f;Q) \le S(f;Q) \le S(f;P).$$

(Ou seja, ao efetuar um refinamento, a soma inferior não diminui e a soma superior não aumenta).

A demonstração ficará omitida, porém faremos uma interpretação geométrica:





PROP.: Sendo $f: A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ função limitada no bloco A, e P, Q duas partições quaisquer, então

$$s(f;P) \leq S(f;Q)$$

Ou seja, qualquer soma inferior é sempre menor ou igual do que qualquer soma superior.

Para mostrar isto basta tomar uma outra partição W que seja refinamento para P e para Q, e usar a proposição anterior. $\square$