CÁLCULO 3

08/07/24 - AULA 23

Na aula passada vimos o importante teste da derivada segunda para classificar os pontos críticos.

Combinando o Teorema de Weierstrass (aula 08) e o teste da derivada segunda, tem-se o resultado:

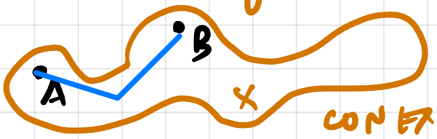
PROP.: Seja $f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ função diferenciável no $\text{int}(\Omega)$, onde Ω é um compacto do $\mathbb{R}^m$. Então, os valores máximo e mínimo ocorrem nos pontos críticos ou na fronteira de Ω.

FÓRMULA DE TAYLOR PARA FUNÇÕES DE $\mathbb{R}^2$ EM $\mathbb{R}$.

Dada $f: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função tal que possua todas as parciais até a ordem n, sendo Ω um convexo(*) do $\mathbb{R}^2$.

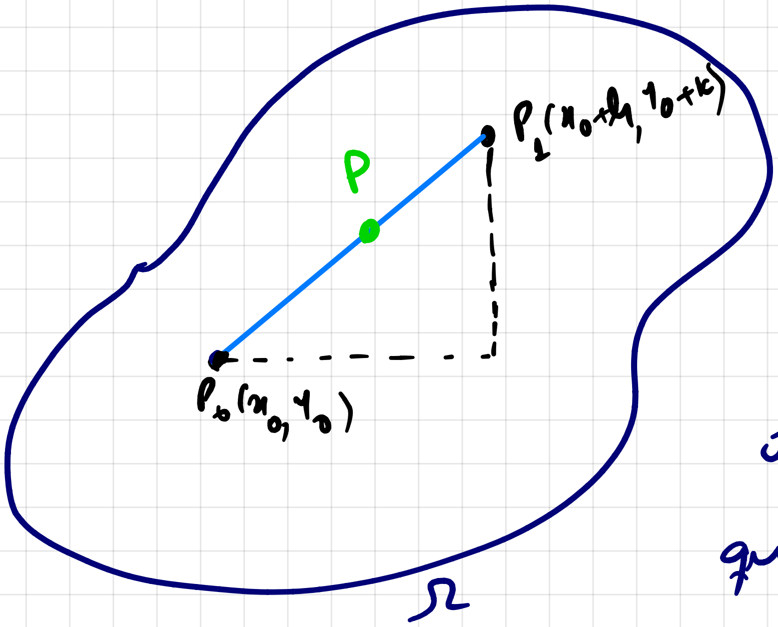
Tome $P_0(x_0, y_0) \in \text{int}\,\Omega$; considere incrementos $h, k \in \mathbb{R}$ tal que $P_1(x_0 + h, y_0 + k) \in \text{int}(\Omega)$.

(*) Um conj $X \subset \mathbb{R}^m$ é um CONVEXO DO $\mathbb{R}^m$ se dados dois pontos A e B quaisquer em X, podemos ligá-los com uma linha poligonal inteiramente contida em X.



CONEXO

NÃO CONEXO



Logo, o segmento $\overline{P_0P_1} \subset \Omega$, pois admitimos Ω convexo.

Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer sobre $\overline{P_0P_1}$.

P é definido, escrevendo:

$$P(x, y); \quad \begin{cases} x = x_0 + th \\ y = y_0 + tk, \end{cases}$$

onde $t \in [0, 1]$.

Queremos representar $f(x, y)$ em termos de $f(x_0, y_0)$, e de suas derivadas parciais, no ponto $P_0(x_0, y_0)$; sobre o segmento $\overline{P_0P_1}$.

Define $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ por

$$g(t) = f(x_0 + th, y_0 + tk)$$

Note que $g(0) = f(x_0, y_0)$; e

$$g(1) = f(x_0 + th, y_0 + tk) = f(x, y)$$

Usando a FÓRMULA DE TAYLOR para $g(t)$, (a uma variável) estudado no cálculo 1 ou 2, temos:

$$\begin{cases} g(t) = g(0) + g'(0).t + g''(0).\dfrac{t^2}{2!} + g'''(0).\dfrac{t^3}{3!} + \\ \qquad \dots + g^{(n)}(0)\dfrac{t^n}{n!} + g^{(n+1)}(\theta t).\dfrac{t^{n+1}}{(n+1)!}, \end{cases}$$

FÓRMULA DE TAYLOR COM RESTO NA FORMA DE LAGRANGE (cálculo 1)

com $0<\theta<1$.

Temos: $g(t) = f(x_0 + th, y_0 + tk)$

$$\begin{cases} g(0) = f(x_0, y_0) \\ g(1) = f(x_0+h, y_0+k) := f(x,y) \end{cases}$$

Então:

$$(*) \quad \underbrace{g(1)}_{f(x_0+h,\, y_0+k)} = \underbrace{g(0)}_{f(x_0,y_0)} + g'(0) + \frac{g''(0)}{2!} + \frac{g'''(0)}{3!} + \dots + \frac{g^{(n)}(0)}{n!} + \frac{g^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!};$$

$0<\theta<1$.

Resta determinar $g^{(k)}(0)$; $n \in \{1, 2, \dots, n+1\}$.

Note que:

$$g(t) = f(\underbrace{\overbrace{x_0 + th}^{x}}, \underbrace{\overbrace{y_0 + tk}^{y}})$$

$f = f(x, y)$
$= f(x(t), y(t))$

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \underbrace{\frac{dx}{dt}}_{h} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \underbrace{\frac{dy}{dt}}_{k} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot h + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot k$$

regra da cadeia

$$\Rightarrow g''(t) = (g'(t))' = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial x} \cdot h + \frac{\partial f}{\partial y} k\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x} h + \frac{\partial f}{\partial y} k\right) \cdot \underbrace{\frac{dx}{dt}}_{h} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x} h + \frac{\partial f}{\partial y} k\right) \underbrace{\frac{dy}{dt}}_{k}$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot h^2 + \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} k \cdot h + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} h \cdot k}_{\text{são iguais, pelo T. Schwarz}} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot k^2$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} h^2 + 2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} k^2$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k\right)^{(2)} f(x, y)$$

NOTAÇÃO SIMBÓLICA PARA MEMORIZAR

Analogamente, se mostra que

$$g'''(t) = \left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k\right)^{(3)} \cdot f(x, y).$$

De modo geral:

$$g^{(m)}(t) = \left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k\right)^{(m)} f(x,y)$$

Então

$$g^{(m)}(0) = \left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k\right)^{(m)} f(x_0,y_0).$$

Assim, a fórmula (*) se transforma na fórmula:

$$(*) \quad \underbrace{g(1)}_{f(x_0+h,\, y_0+k)} = \underbrace{g(0)}_{f(x_0,y_0)} + g'(0) + \frac{g''(0)}{2!} + \frac{g'''(0)}{3!} + \cdots + \frac{g^{(m)}(0)}{m!} + \frac{g^{(m+1)}(\theta)}{(m+1)!};$$

$$0 < \theta < 1.$$

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0) + \left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k\right) f(x_0,y_0) +$$

$$+ \frac{1}{2!} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k\right)^{(2)} f(x_0,y_0) +$$

$$+ \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k\right)^{(3)} f(x_0,y_0) + \cdots$$

$$\cdots + \frac{1}{m!} \left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k\right)^{(m)} f(x_0,y_0) + R_m,$$

onde $R_m = \frac{1}{(m+1)!} \left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k\right)^{(m+1)} f(x_0+\theta h,\, y_0+\theta k)$;

$$0 < \theta < 1;$$

chamada de FÓRMULA DE TAYLOR COM RESTO NA FORMA DE LAGRANGE para funções de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$.

EXEMPLO. Expandir $f(x,y) = \operatorname{sen} xy$ em potências de x e de y no ponto $P(0, \frac{\pi}{2})$.

(Faremos na próxima aula)

[Obs: O restante da aula foi usado para aplicar um exercício avaliativo.]