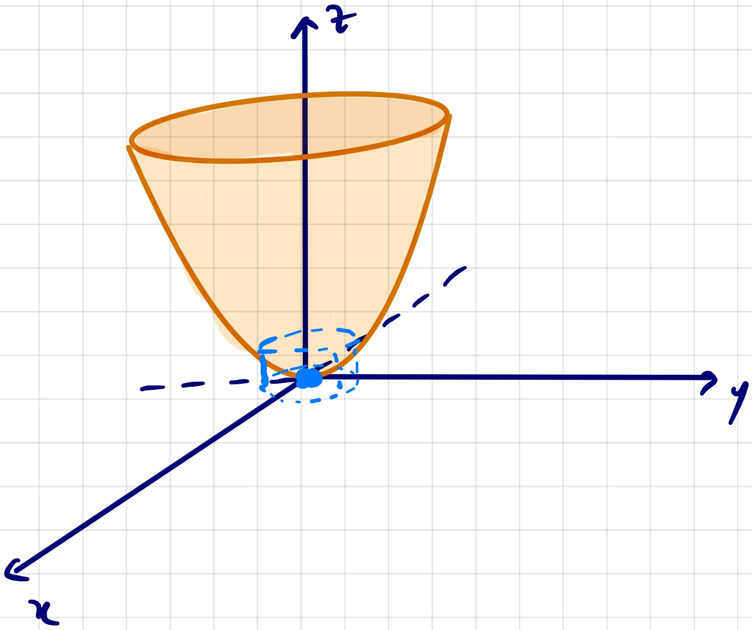
CÁLCULO 3

$\boxed{05/07/24 - \text{AULA } 22}$

Na aula anterior iniciamos os estudos de EXTREMOS RELATIVOS E ABSOLUTOS.

Vimos que, sendo $f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ diferenciável em $a \in \operatorname{int}(\Omega)$, e se a for um extremo relativo para f, então $\nabla f(a) = \vec{0}$.

Ex.: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; $f(x,y) = x^2+y^2$. Sabemos que o seu gráfico é um parabolóide; e que, geometricamente tem-se que $(0,0)$ é um ponto de mínimo relativo (e absoluto!)



À luz da proposição recordada acima, temos que f é diferenciável, pois $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$, que são contínuas. Como sabemos que $(0,0)$ é um extremo relativo (isso geometricamente), então, $\nabla f(0,0) = \vec{0}$.

De fato, $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$

$$\Rightarrow \nabla f(0,0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right)$$

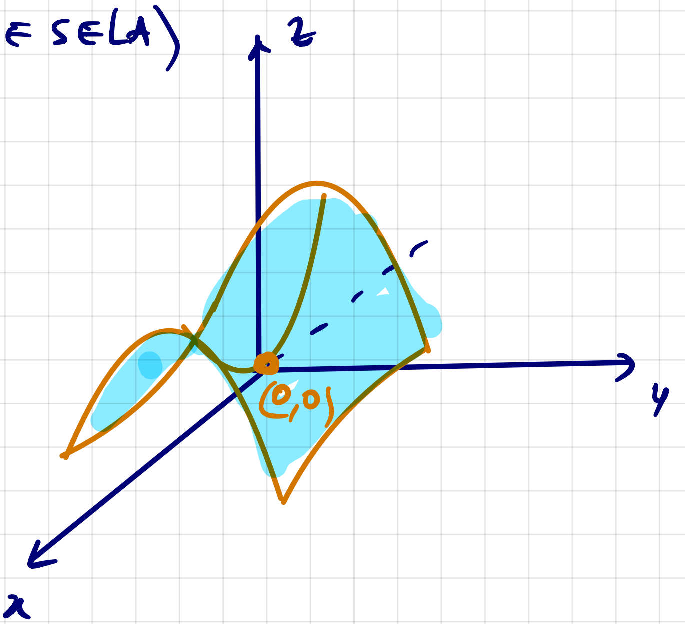
$$= (2.0, 2.0) = (0,0) = \vec{0}.$$

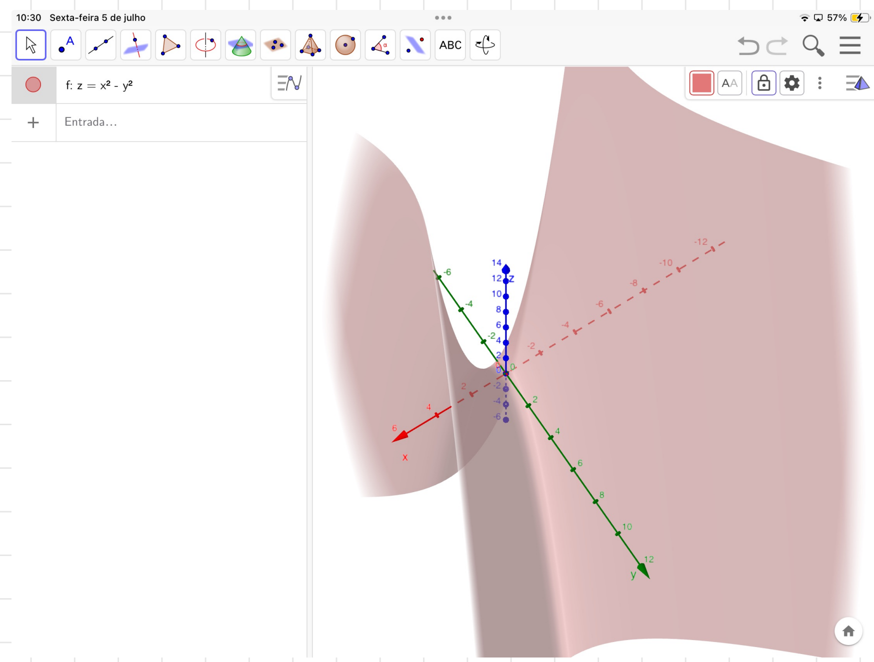
Porém, alertamos que a recíproca da proposição, em geral, é falsa. Ou seja, o fato de que $\nabla f(a) = \vec{0}$, não implica em a ser um ponto extremo relativo para a f.

De fato, por exemplo, considere a função $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = x^2 - y^2$ (PARABOLÓIDE HIPERBÓLICO)

Note que $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (2x, -2y)$

$\Rightarrow \nabla f(0,0) = (0,0)$, porém a origem não é extremo relativo para f (será o que chamamos de PONTO DE SELA)





→ Pelo geogebra.

Obs: No caso de $f:\Omega\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, então f diferenciável em $a\in int(\Omega)$, e sendo um extremo relativo para f, então

$$(0,0)=\vec{0}=\nabla f(a)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a),\ \frac{\partial f}{\partial y}(a)\right)$$

$$\iff \frac{\partial f}{\partial x}(a)=0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a)=0.$$

Def: Dizemos que $a\in int(\Omega)$ é um PONTO CRÍTICO de $f:\Omega\subset\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ se $\nabla f(a)=\vec{0}$.

EXEMPLOS:

01) Encontre, se existirem, os pontos críticos de $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y)=x^2+4xy-y^2-8x-6y.$$

SOLUÇÃO: Precisamos verificar quais pontos (x,y)

tem-se que $\nabla f(x,y) = (0,0)$.

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$= (2x+4y-8,\ 4x-2y-6) = (0,0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+4y-8=0 \\ 4x-2y-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y=4 \\ 2x-y=3 \end{cases}$$

$\hookrightarrow y = 2x-3$

$$\Rightarrow x+2y=4$$
$$x+2.(2x-3)=4$$
$$x+4x-6=4$$
$$5x=10$$
$$\Rightarrow \boxed{x=2}$$

$$y = 2x-3$$
$$y = 2.(2)-3$$
$$\boxed{y=1}$$

Conclusão: esta f possui apenas um ponto crítico: $(x,y) = (2,1)$.

02) Idem para $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; $f(x,y) = x + y.\operatorname{sen} x$.

<u>Solução:</u> $\nabla f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad e \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 + y.\cos x = 0 \Leftrightarrow \\ \operatorname{sen} x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi,\ \forall k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

$\circledast$

Neste caso; $1 + y \cdot \cos(k\pi) = 0$

$$1 + y \cdot (\pm 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 + y = 0 \longrightarrow & y = -1 \\ \text{ou} & \text{ou} \\ 1 - y = 0 & y = 1. \end{cases}$$

Conclusão: temos os pontos críticos:

$$(x,y) = (k\pi, 1) \text{ ou}$$

$$(x,y) = (k\pi, -1)$$

Para decidir se um dado ponto crítico é máximo, relativo, mínimo relativo, ou nenhum deles, temos o seguinte resultado, uma extensão de um resultado visto no cálculo 1. Antes de mostrá-lo, para simplificar, apresentamos a def. a seguir:

<u>Def</u>: Seja $f: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função tal que as derivadas parciais segundas existam. Definimos a MATRIZ HESSIANA de f, por:

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}$$

Isto posto, enunciamos o seguinte teorema, cuja demonstração será omitida.

TEOREMA: (TESTE DA DERIVADA SEGUNDA) Seja $f: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciável em $a \in int(\Omega)$, tal que as derivadas parciais segundas sejam contínuas, sendo a um ponto crítico de f. (i.e., $\nabla f(a) = \vec{0}$) Então:

(i) se $\det H(a) > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) > 0$, então o ponto a será um ponto de MÍNIMO RELATIVO.

(ii) se $\det H(a) > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) < 0$, então o ponto a será um ponto de MÁXIMO RELATIVO.

(iii) se $\det H(a) < 0$, então o ponto a chama-se um PONTO DE SELA para f.

(iv) se $\det H(a) = 0$, nada segue sobre o que possa ser o ponto a.

Uma prova pode ser encontrada, por exemplo, em LEITHOLD, VOL 2 ou STEWART, VOL 2.

<u>obs.:</u> Este resultado se estende para funções $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, neste caso, $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$

$$H(x) = [H]_{m \times m} =$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_1} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_2} \\ - & - & - & - & - \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_m} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_m} & & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_m^2} \end{bmatrix}_{m \times m}.$$

Vejamos exemplos:

01) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; $f(x,y) = x^2 - y^2$.

Já vimos que $(0,0)$ é ponto crítico de f, pois:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (0,0) \iff$$

$$(2x, -2y) = (0,0) \iff \begin{cases} 2x = 0 \\ -2y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix}; \quad \text{onde } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$\Rightarrow H(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \det H(x,y) = -4 < 0$. Logo, $(0,0)$ é um ponto de sela para $f(x,y) = x^2 - y^2$.

02) Seja $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = 2x^4 + y^2 - x^2 - 2y$.

Obter extremos relativos e classificá-los

ou seja, verificar se são máx. relativo ou mínimo relativo ou de sela. (ou nada)

Solução: pontos críticos: onde

$$\nabla f(x,y) = (0,0),\ \text{i.e.};$$

onde $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$; ou seja:

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x} = 8x^3 - 2x \quad ; \quad 0 = \frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8x^3 - 2x = 0 \Rightarrow 2x(4x^2 - 1) = 0 \\ 2y - 2 = 0 \Rightarrow y = 1 \end{cases}$$

$2x = 0$ ou $4x^2 - 1 = 0$

$x = 0$ ou $4x^2 = 1$

$x = \pm \frac{1}{2}$

Pontos críticos:

$$(x;y) : \begin{cases} (0, 1); \\ (\frac{1}{2}, 1); \\ (-\frac{1}{2}, 1) \end{cases}$$

Cálculo de $H(x,y)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 8x^3 - 2x \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 24x^2 - 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 2 \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$$

$$\Rightarrow \quad H(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24x^2 - 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

- VERIFICANDO O PONTO $(0,1)$: $\quad H(0,1) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \quad \det(H(0,1)) = -4 < 0$$

Logo, o ponto $(0,1)$ é um ponto de sela.

- VERIFICANDO O PONTO $(\frac{1}{2}, 1)$:

$$H(\tfrac{1}{2}, 1) = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$\rightarrow \det H(\frac{1}{2}, 1) = 8 - 0 = 8 > 0$. (tem ponto extremo!)

e como $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\frac{1}{2}, 1) = 4 > 0$, é um ponto de MÍNIMO RELATIVO.

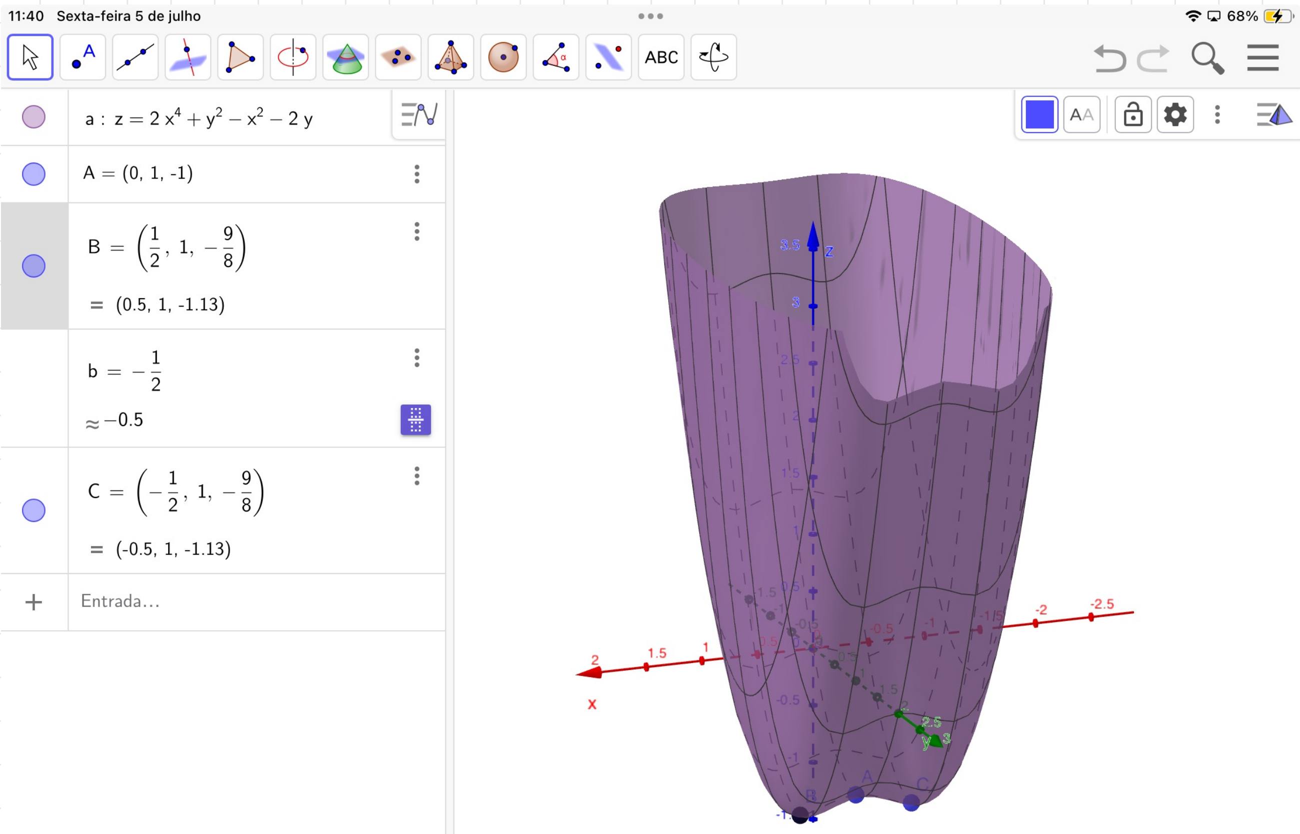
- VERIFICANDO O PONTO $(-\frac{1}{2}, 1)$:

$$H\left(-\frac{1}{2},1\right) = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \det H\left(-\frac{1}{2},1\right) = 8 - 0 = 8 > 0$ (é ponto extremo relativo)

e como $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(-\frac{1}{2},1\right) = 4 > 0$, é também um ponto de mínimo relativo.

Abaixo temos uma ilustração do gráfico de f, bem como os extremos destacados.



Como se trata de uma superfície, tomamos os pontos:

$\left(0, 1, f(0,1)\right)$; $\left(\frac{1}{2}, 1, f\left(\frac{1}{2},1\right)\right)$; $\left(-\frac{1}{2}, 1, f\left(-\frac{1}{2},1\right)\right)$

03) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y + \operatorname{sen}(x+y)$

Resp.: $x = y = \frac{\pi}{3}$ dá máx.