CÁLCULO 3

03/07/24 — AULA 21

Exemplifiquemos o último resultado visto da aula passada:

Ex 1 Seja $f(x,y) = x \cdot e^y$.

(a) Determine a taxa de variação de f no ponto $P(2,0)$ na direção de P a $Q(\frac{1}{2}, 2)$.

(b) Em que direção f tem a máxima taxa de variação? Qual é essa máxima taxa de variação?

SOLUÇÃO:

(a) A taxa de variação será $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(P)$, onde $\vec{u}$ deve ser unitário de P a Q.

Escreva $\vec{w} = \overrightarrow{PQ} = Q - P = (\frac{1}{2}, 2) - (2,0)$

$$= \left(-\frac{3}{2}, 2\right)$$

Note que: $\|\vec{w}\| = \sqrt{(-\frac{3}{2})^2 + (2)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + 4}$

$$= \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$$

Então, tomamos

$$\vec{u} = \frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|} = \frac{1}{\|\vec{w}\|} \cdot \vec{w} = \frac{2}{5} \cdot \left(-\frac{3}{2}, 2\right)$$

$$\Rightarrow \vec{u} = \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

Com isso, a taxa de variação será

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(P) = \nabla f(P) \cdot \vec{u} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(P), \frac{\partial f}{\partial y}(P)\right) \cdot \vec{u}$$

$$= \left(e^y(2,0), x \cdot e^y(2,0)\right) \cdot \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

$f(x,y) = xe^y$

$$= \left(e^0, 2 \cdot e^0\right) \cdot \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) = (1, 2) \cdot \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

$$= 1 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) + 2 \cdot \left(\frac{4}{5}\right) = -\frac{3}{5} + \frac{8}{5} = 1.$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(P) = 1.}$$

(b) É na direção do vetor $\vec{u}$; e seu valor é

$\|\nabla f(P)\|$, onde

$$\nabla f = (e^y, x \cdot e^y)$$

$$\Rightarrow \nabla f(P) = (e^0, 2e^0) = (1, 2)$$

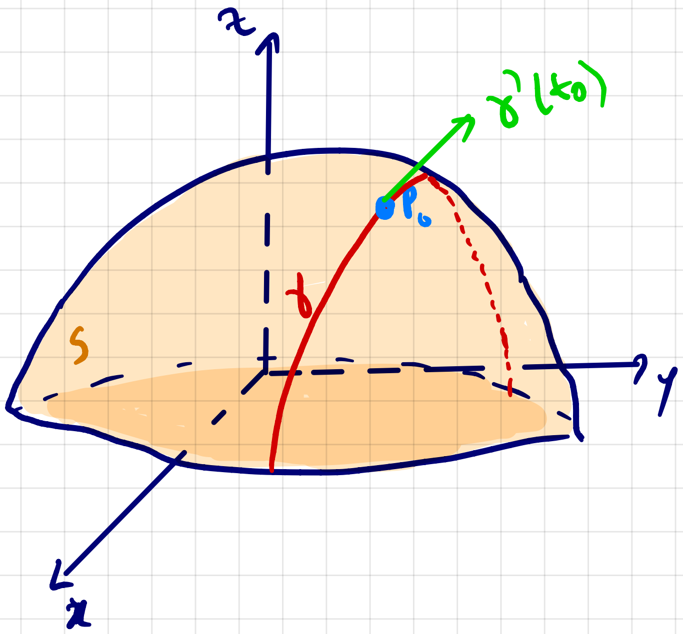
$$\Rightarrow \|\nabla f(P)\| = \sqrt{(1)^2 + (2)^2} = \sqrt{5}.$$

PLANO TANGENTE A UMA SUPERFÍCIE DO $\mathbb{R}^3$:

Seja $z = f(x,y)$ uma função de duas variáveis reais. Considere S a superfície dada por ela; representada pela equação $f(x,y) - z = 0$ (representação implícita).

Considere F a função:

$F(x,y,z) = f(x,y) - z$, que descreve S.



Seja $P_0(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$ um ponto sobre S.

Nosso objetivo é obter um plano tangente à superfície S em P_0.

Seja $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ uma curva qualquer sobre S passando pelo ponto P_0.

Logo, $\exists\, t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\gamma(t_0) = P_0$.

Então, parametrizando F, temos, sobre γ, que:

$$F(x,y,z) = 0 \iff F(x(t), y(t), z(t)) = 0,$$

Derivando F, pela Regra da Cadeia, em t_0, vem:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt}\right)\Bigg|_{t_0} = 0$$

Ou seja:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right)\Bigg|_{t_0} \cdot \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)\Bigg|_{t_0} = 0$$

$$\nabla F\Big|_{t_0} \cdot \gamma'(t_0) = 0$$

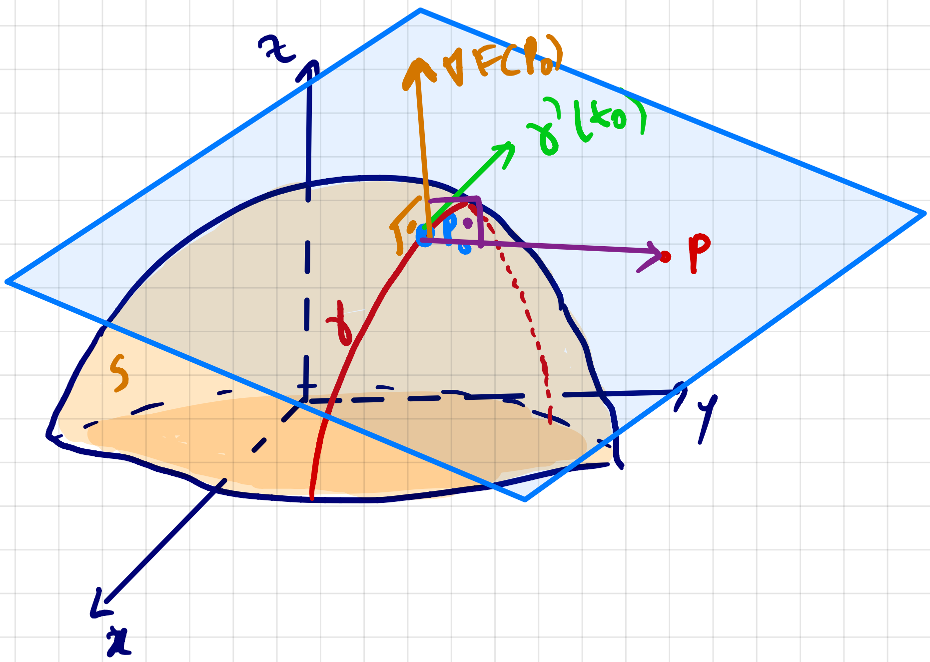
Logo, $\underbrace{\nabla F\big|_{t_0}}_{=\nabla F(P_0)}$ é ortogonal$^{(*)}$ ao vetor tangente $\gamma'(t_0)$.

Dado $P(x,y,z)$ um ponto qualquer sobre o plano (π) que queremos determinar, então $\vec{P_0P} \perp \nabla F(P_0)$

Assim, $\nabla F(P_0) \cdot \vec{P_0P} = 0$.

Isso fornece a eq. do plano desejada.

ou seja, $\nabla F(P_0)$ serve como vetor normal ao plano a ser determinado



(*) Lembre da geom. Analítica: se $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, então $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Ex.: Encontre a eq. do plano tangente ao gráfico de $f(x,y) = (x+y)\,e^{x}$ no ponto $P_0(0, 2, 2)$.

SOLUÇÃO: O vetor normal em P_0 ao plano desejado será: $\nabla F(P_0)$; onde

$$F(x,y,z) = f(x,y) - z$$ (gráfico da superfície S)

$$\Rightarrow F(x,y,z) = (x+y).\,e^{x} - z$$

$$\nabla F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right)$$

$$= \left((x+y).e^{x} + 1.e^{x},\; e^{x}.(1),\; -1\right)$$

$$\Rightarrow \nabla F = \left((x+y+1).e^{x},\; e^{x},\; -1\right)$$

$$\Rightarrow \nabla F(P_0) = \left((0+2+1).e^{0},\; e^{0}, -1\right) = (3, 1, -1)$$

$P_0(0,2,2)$

$$\Rightarrow \nabla F(P_0) = (3,1,-1).$$

Então, $\forall\, P(x,y,z) \in (\pi)$ (o plano a encontrar), temos:

$$\nabla F(P_0) \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$$

$$(3,1,-1).\,(P-P_0) = 0$$

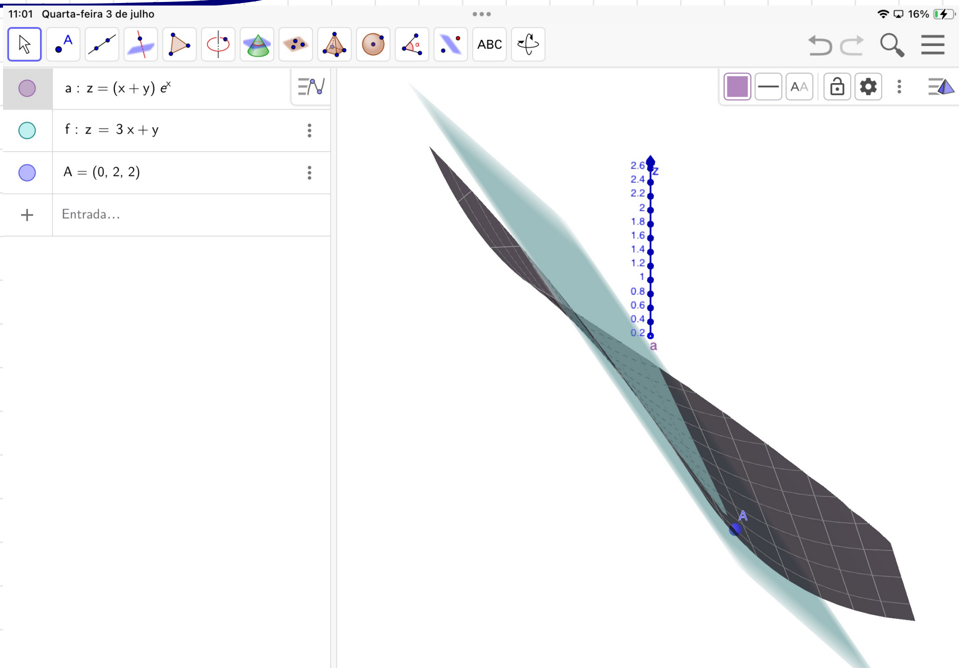
$$(3,1,-1).\,((x,y,z)-(0,2,2)) = 0$$

$$(3,1,-1).\,(x, y-2, z-2) = 0$$

$$3x + 1\cdot(y-2) - 1\cdot(z-2) = 0$$

$$\boxed{(\pi):\quad 3x + y - z = 0}$$

REPRESENTAÇÃO NO GEOGEBRA.
$(A = P_0)$

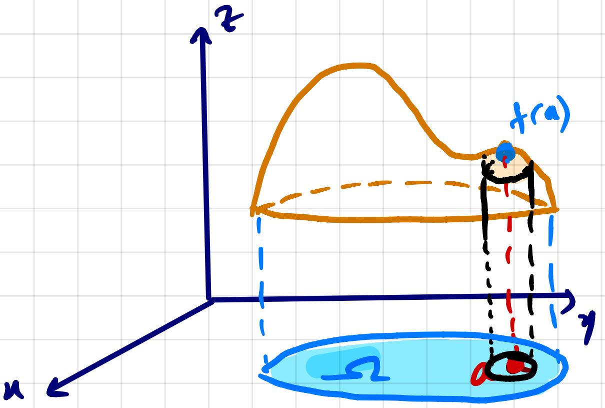


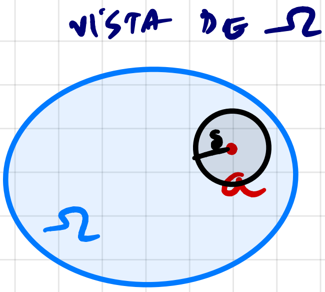
EXTREMOS RELATIVOS E ABSOLUTOS PARA FUNÇÕES A VÁRIAS VARIÁVEIS:

No que segue, apresentaremos um estudo que, na verdade, é uma extensão para várias variáveis do que outrora fora feito no CÁLCULO 1.

Def.: Seja $f : \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma função escalar.
Dizemos que $a \in int(\Omega)$ é um ponto de MÁXIMO RELATIVO ou LOCAL se $\exists\, \delta > 0$ tal que

$$f(x) \leq f(a), \quad \forall\, x \in B_\delta(a).$$





Def.: Seja $f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma função e $a \in \text{int}(\Omega)$. Dizemos que a é um ponto de MÍNIMO RELATIVO para f se $\exists\, \delta > 0$ tal que

$$f(x) \geq f(a), \quad \forall x \in B_\delta(a).$$

Def.: Dizemos que a é um ponto de MÁXIMO ABSOLUTO para $f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ se $f(x) \leq f(a)$, $\forall x \in \Omega$. Dizemos que a será um ponto de MÍNIMO ABSOLUTO para f se $f(x) \geq f(a)$, $\forall x \in \Omega$.

Def.: Os pontos de MÁXIMO e MÍNIMO são chamados de PONTOS EXTREMOS. Se for máx. ou mín. relativo, é chamado de EXTREMO RELATIVO, e se for MÁX. ou MÍN. absoluto, é chamado de EXTREMO ABSOLUTO. Se a é um ponto extremo (relativo ou absoluto), então, a sua imagem $f(a)$ é chamada de VALOR EXTREMO (relativo ou absoluto).

PROPOSIÇÃO: Seja $f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Se $a \in \text{int}(\Omega)$ for um ponto extremo, então

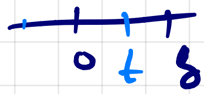
$$\nabla f(a) = \vec{0}.$$

DEMONSTR.: Seja $f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Seja $a \in int(\Omega)$ um ponto extremo. Sem perda de generalidade, assuma que a seja um ponto de MÍNIMO RELATIVO.

Então, $\exists\, \delta > 0$ tal que

$$f(x) \geq f(a), \quad \forall x \in B_\delta(a). \qquad (*)$$

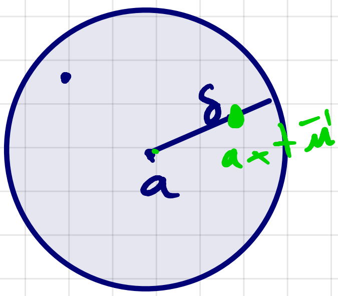
Seja $\vec{u} \in \mathbb{R}^m$ um vetor unitário qualquer, ou seja, tal que $\|\vec{u}\| = 1$.



Tome $t \in \mathbb{R}$ tal que $|t| < \delta$.

Disso, $a + t.\vec{u} \in B_\delta(a)$

Então, $f(a+tu) \geq f(a)$, por $(*)$



$f(a+tu) \geq f(a)$

Assim, por um lado, temos:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a) = \lim_{t \to 0^+} \frac{\overbrace{f(a+t\vec{u}) - f(a)}^{\geq 0}}{\underbrace{t}_{>0}} \geq 0;$$

por outro lado;

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a) = \lim_{t \to 0^-} \frac{\overbrace{f(a+t\vec{u}) - f(a)}^{\geq 0}}{\underbrace{t}_{<0}} \leq 0$$

Portanto, $\frac{\partial f}{\partial u}(a) = 0$, ou seja,

$$\nabla f(a) \cdot \vec{u} = 0$$

e como o vetor $\vec{u}$ é não nulo, segue que

$$\nabla f(a) = \vec{0} \qquad \square$$