CÁLCULO 3

01/07/24 – AULA 20

DERIVADA DIRECIONAL:

Def.: Seja $f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma função escalar, $a \in int(\Omega)$, e seja $\vec{u}$ um vetor unitário, ou seja, tal que $\|\vec{u}\| = 1$. Definimos a DERIVADA DE f NA DIREÇÃO DO VETOR $\vec{u}$, no ponto a, por:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + t\vec{u}) - f(a)}{t},$$

se este limite existir.

No caso $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $f: \Omega \to \mathbb{R}$; $a = (x_0, y_0) \in int(\Omega)$, e tomando $\vec{u} = \vec{i} = (1,0)$, neste caso,

$$\|\vec{u}\| = \|\vec{i}\| = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1 \quad \text{(vetor unitário)}$$

e com isso, teremos:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{i}}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + t\vec{i}) - f(a)}{t} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f\big((x_0, y_0) + t \cdot (1,0)\big) - f(x_0, y_0)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x}(a)$$

Ou seja, $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{i}}(a) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(a)$.

Do mesmo modo se tomarmos $\vec{j} = (0,1)$, vamos obter

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{j}}(a) = \frac{\partial f}{\partial y}(a)$$

Ou seja, as derivadas parciais, anteriormente estudadas, são <u>derivadas direcionais</u>, na direção de vetores $\vec{e}_i$ da base canônica do $\mathbb{R}^m$.

$$\vec{e}_i = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots 0)$$

$\longrightarrow$ 1 na posição i

<u>Ex.</u>: $z = f(x,y) = x^2y + \sqrt{y}$; $\vec{u} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Calcule $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}$.

<u>SOLUÇÃO</u>: Note que $\vec{u}$ é unitário:

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1.$$

Então:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}} = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + t\vec{u}) - f(a)}{t} \quad ; \text{ com } a = (x,y), \ \vec{u} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f\left((x,y) + t \cdot \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) - f(x,y)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{f\left(x+\frac{1}{2}t,\ y-\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - f(x,y)}{t} = \qquad f(x,y) = x^2y+\sqrt{y}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\left(x+\frac{1}{2}t\right)^2\cdot\left(y-\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \sqrt{y-\frac{\sqrt{3}}{2}t} - \left(x^2y+\sqrt{y}\right)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\left(x^2 + \cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}x\cdot t + \frac{1}{4}t^2\right)\left(y-\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \sqrt{y-\frac{\sqrt{3}}{2}t} - x^2y - \sqrt{y}}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\cancel{x^2y} + xyt + \frac{1}{4}yt^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}x^2t - \frac{\sqrt{3}}{2}xt^2 - \frac{\sqrt{3}}{8}t^3 + \sqrt{y-\frac{\sqrt{3}}{2}t} - \cancel{x^2y} - \sqrt{y}}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{xyt + \frac{1}{4}yt^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}x^2t - \frac{\sqrt{3}}{2}xt^2 - \frac{\sqrt{3}}{8}t^3}{t} +$$

$$+ \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{y-\frac{\sqrt{3}}{2}t} - \sqrt{y}}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\cancel{t}\left(xy + \underbrace{\tfrac{1}{4}yt}_{\to 0} - \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 - \underbrace{\tfrac{\sqrt{3}}{2}xt}_{\to 0} - \underbrace{\tfrac{\sqrt{3}}{8}t^2}_{\to 0}\right)}{\cancel{t}}$$

$$+ \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{y-\frac{\sqrt{3}}{2}t} - \sqrt{y}}{t} \cdot \frac{\sqrt{y-\frac{\sqrt{3}}{2}t} + \sqrt{y}}{\sqrt{y-\frac{\sqrt{3}}{2}t} + \sqrt{y}}$$

$$= xy - \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 + \lim_{t\to 0} \frac{\cancel{y} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cancel{t} - \cancel{y}}{\cancel{t}\cdot\left(\sqrt{y-\frac{\sqrt{3}}{2}t} + \sqrt{y}\right)}$$

$$= xy - \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 + \lim_{t\to 0} \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{y - \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}t}_{0}} + \sqrt{y}}$$

$$= xy - \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 - \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2\sqrt{y}} = xy - \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

$$xy - \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 - \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{y}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial f}{\partial \vec{u}} = xy - \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}\frac{1}{\sqrt{y}}.}$$

Felizmente há uma forma mais simples e rápida de calcular $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}$, dada pela pela seguinte proposição:

PROP.: Seja $f : \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ diferenciável em $a \in \text{int}(\Omega)$ e $\vec{u}$ um vetor unitário do $\mathbb{R}^m$. Então

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a) = df_a \cdot \vec{u}$$

PRODUTO ESCALAR.

DEMONSTR.: Como f é diferenciável em a, segue que, $\forall h \in \mathbb{R}^m$;

$$f(a+h) = f(a) + df_a \cdot h + \|h\| \cdot r(h),$$

onde $r(h) \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0$. Em particular tome

$$h = t.\vec{u} \in \mathbb{R}^m.$$

Assim: $f(\underbrace{a+h}_{a+t\vec{u}}) - f(a) = d_a f . h + \|h\| . r(h)$

Então:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+t\vec{u}) - f(a)}{t}$$

LEMBRE QUE $d_a f = L$ é uma transf. Linear. Assim $L(t\vec{u}) = t \cdot L(\vec{u})$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{d_a f . h + \|h\| . r(h)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{d_a f . (t\vec{u}) + \|t\vec{u}\| . r(t\vec{u})}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\cancel{t} . d_a f(\vec{u})}{\cancel{t}} + \underbrace{\frac{|t| . \|\vec{u}\| . r(t\vec{u})}{t}}_{\pm 1 \text{ Limitado}} \to 0$$

$r(t\vec{u}) \to 0$

$$= d_a f . \vec{u}$$

$\square$

Vamos melhorar este resultado no que segue:

Def.: Seja $f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma função escalar.

Definimos o VETOR GRADIENTE de f por

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots \frac{\partial f}{\partial x_m} \right)$$

Ex.: Dada $f(x,y,z) = e^{xy} + z^2$

Então;

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

$$= \left(y \cdot e^{xy}, x e^{xy}, 2z \right)$$

De posse desse conceito, sendo $f : \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, temos que

$$[d_a f]_{1 \times m} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_m} \end{bmatrix}_{1 \times m}$$

ou seja, vamos identificar esta matriz jacobiana com o conceito acima de vetor gradiente.

Ou seja, teremos:

$$\underbrace{\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a)} = d_a f \cdot \vec{u} = \underbrace{\nabla f \cdot \vec{u}}.$$

Voltando ao exemplo dado no início da aula:

Ex.: $z = f(x,y) = x^2 y + \sqrt{y}$; $\vec{u} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$.

Calcule $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}$.

Solução: $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}} = \nabla f \cdot \vec{u} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) \cdot \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$

$$= \left(2xy, x^2 + \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}} \cdot 1 \right) \cdot \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

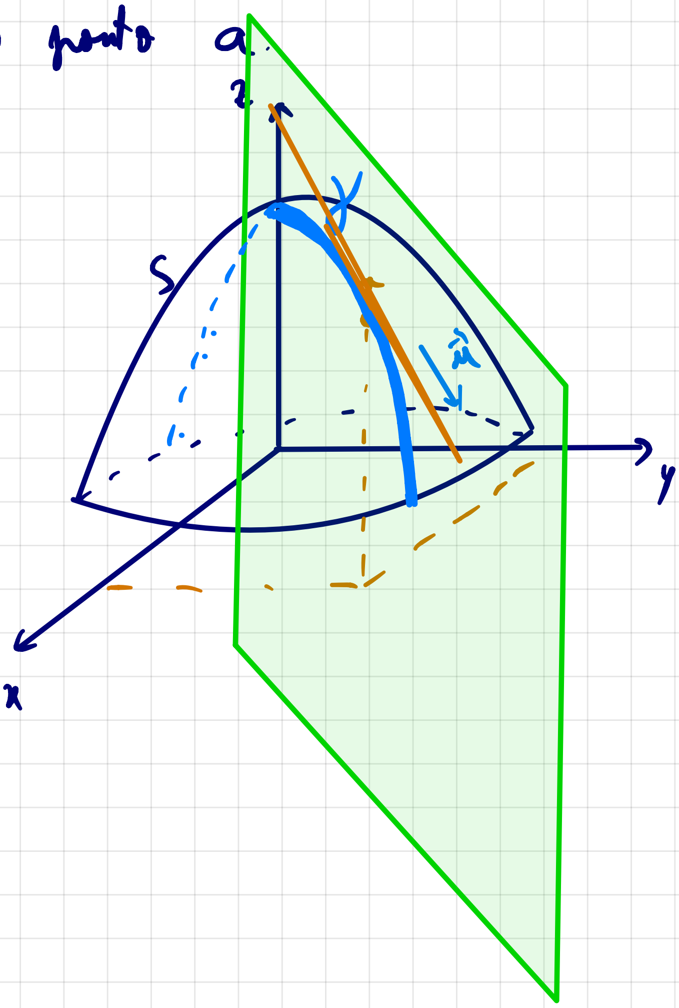
$$= \cancel{2}xy \cdot \frac{1}{\cancel{2}} + \left(x^2 + \frac{1}{2\sqrt{y}}\right) \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= xy - \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 - \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{y}}.$$

SIGNIFICADO GEOMÉTRICO DA DERIVADA DIRECIONAL:

Seja $f: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $z = f(x,y)$ uma função escalar de 2 variáveis reais, e considere S a superfície dada pelo gráfico de f. Tome $\vec{u}$ tal que $\|\vec{u}\| = 1$.

Então, $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a)$, $a \in \operatorname{int}(\Omega)$, representará a inclinação da reta tangente à curva γ dada pela interseção da superfície S com o plano paralelo ao vetor $\vec{u}$, passando pelo ponto a.



$a(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$

Como derivadas são taxas de variação, a derivada direcional também mede a taxa de variação, c.f. o seguinte resultado:

TEOREMA: A máxima taxa de variação ocorre no vetor gradiente, e o seu valor máximo é dado por $\|\nabla f\|$, na mesma direção de $\vec{u}$.

DEMONSTR.: Dada $f : \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$; $\vec{u}$ vetor unitário. Então:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}} = \nabla f \cdot \vec{u} \overset{(*)}{=} \|\nabla f\| \cdot \underbrace{\|\vec{u}\|}_{=1} \cdot \cos\theta$$

$$= \|\nabla f\| \cdot \overbrace{\cos\theta}^{=1}$$, e este valor é máximo quando $\cos\theta = 1$, i.e., quando $\theta = 0°$, ou seja, ∇f tem mesma direção que $\vec{u}$. $\square$

(*) LEMBRA-TE DA GEOMETRIA ANALÍTICA:

$\vec{u}, \vec{v}$ vetores do $\mathbb{R}^m$.

Então $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\theta$.