CÁLCULO 1, T2:

09/07/24 — AULA 09

Na aula passada estudamos a função exponencial e logaritmos.

PROPOSIÇÃO: (mudança de base dos logaritmos):

Sejam $a, b, c > 0$ com $b \neq 1$, $c \neq 1$. Então:

$$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$$

DEMONSTR.: Escreva $\log_b a = P$;

$$\log_c a = Q \quad \text{e} \quad \log_c b = R.$$

Precisamos mostrar que $P = \frac{Q}{R}$

Temos:

- $\log_b a = P \iff b^P = a$ (I)
- $\log_c a = Q \iff c^Q = a$. (II)
- $\log_c b = R \iff c^R = b$ (III)

De (I) e (II), temos

$$c^Q = a = b^P \Rightarrow c^Q = b^P \underset{\text{por (III)}}{=} (c^R)^P$$

$$\Rightarrow e^{Q} = e^{R \cdot P} \Rightarrow Q = R \cdot P$$

$$\Rightarrow P = \frac{Q}{R}$$

$\square$

EXERCÍCIO:

LISTA 01.

15. Um quadro de Vermeer (1632-1675) ainda contém 99,5% de seu carbono-14 (meia vida de 5730 anos). A partir dessa informação, você pode determinar se o quadro é ou não falsificado? Justifique.

A meia-vida de um material radiativo é o tempo necessário para que metade do mesmo se decomponha, transformando-se em um material estável.

[Ex: se a meia vida de certo material é 1000 anos, se hoje há 100g de material radioativo em um dado material, daqui a 1000 anos ainda restará 50g, e assim por diante.]

SOLUÇÃO: Considere a massa inicial m_0 de carbono 14.

Hoje: resta $\frac{99{,}5}{100} m_0 = \frac{995}{1000} m_0$.

Qual a lei de decaimento desse problema?

$t = 0 \Rightarrow m = m_0$

$t = 5730 \Rightarrow m = \frac{1}{2} m_0$

$t = 2 \cdot 5730 \Rightarrow m = \frac{1}{2^2} m_0$

$t = 3 \cdot 5730 \Rightarrow m = \frac{1}{2^3} m_0$

$\vdots$

$t = k \cdot 5730 \Rightarrow m = \frac{1}{2^k} m_0$

$k = \frac{t}{5730} \longrightarrow m(t) = \left(\frac{1}{2}\right)^k m_0$

$m(t) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}} \cdot m_0$

Ou seja, temos $m(t) = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}}$

$m = \frac{995}{1000} m_0$; $\underline{\underline{t = ?}}$

$\frac{995}{1000} \cancel{m_0} = \cancel{m_0} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}} = \frac{995}{1000}$.

Aplicando logaritmo:

$$\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}} = \log_{10}\frac{995}{1000}$$

$$\frac{t}{5730}\cdot\log_{10}\frac{1}{2} = \log_{10}\frac{995}{1000}$$

$$\frac{t}{5730} = \frac{\log_{10} 0{,}995}{\log_{10} 0{,}5}$$

$$t = 5730\cdot\frac{\log_{10} 0{,}995}{\log_{10} 0{,}5}$$

$$t \cong 5730\cdot\frac{(-0{,}00217691\,9)}{(-0{,}301029996)}$$

$$t \cong 41{,}437 \text{ anos.}$$

Ou seja, se hoje há 99,5% de C^{14} presente no quadro, há aprox. 41 anos atrás o quadro foi pintado. Ou seja o quadro seria de:

$$2024 - 41 = 1983$$

Ou seja, o quadro seria da década de 80, logo, o quadro é falso.

<u>Obs</u>: São usadas duas bases importantes dos logaritmos.

- BASE 10. Neste caso, escrevemos $\log x = \log_{10} x$

- BASE $e \cong 2{,}718$ (NÚMERO DE EULER).

Neste caso, escrevemos:

$$\log_e x = \ln x.$$

(este também é chamado de LOGARITMO NATURAL)

FUNÇÃO LOGARITMICA:

<u>Def</u>: Chama-se FUNÇÃO LOGARÍTMICA a função $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \log_a x$ $(a > 0$ e $a \neq 1)$

Passando para a NOTAÇÃO EXPONENCIAL, escrevemos:

$$y = \log_a x \iff x = a^y$$

Note que, se $a > 1$ o gráfico é uma função crescente, e se $0 < a < 1$, será decrescente.

Além disso, de $x = a^y > 0$; por isso, $D(f) = (0, +\infty)$, e a reta $x = 0$ é uma ASSÍNTOTA VERTICAL.

Vejamos alguns exemplos:

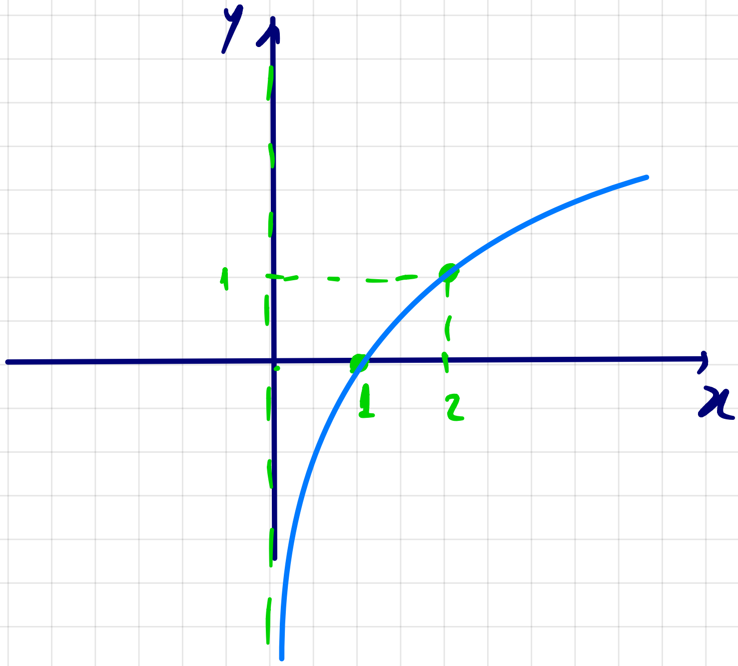
01) $y = \log_2 x$. gráfico?

Solução: $y = \log_2 x \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} 2^y = x > 0$.

$D(f) = (0, +\infty)$

(Assíntota vertical: $x = 0$)

$x = 2^y$	y
$2^0 = 1$	0
$2^1 = 2$	1



02) $y = 2 - \log_2 (x+1)$. gráfico?

Solução: Escreva:

$$y - 2 = -\log_2 (x+1) \qquad (\times -1)$$

$$\log_2 (x+1) = 2 - y \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} 2^{2-y} = x+1$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{x = 2^{2-y} - 1.}$$

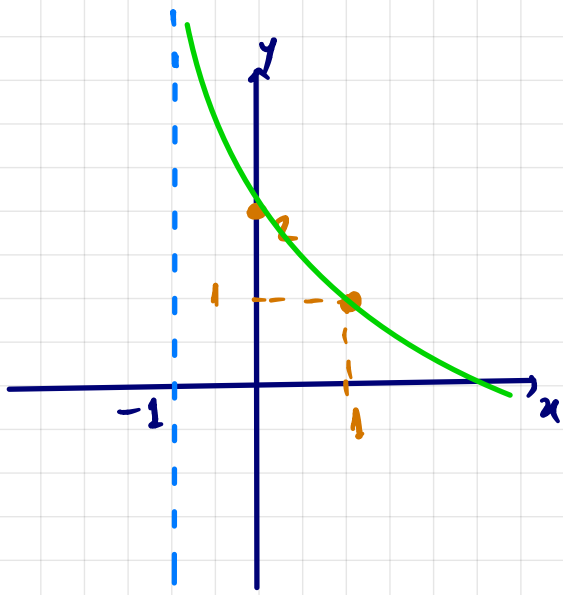
0^1

$x + 1 > 0$

$x > -1$

Assíntota vertical: $x = -1$

$x = 2^{2-y} - 1$	y
$2^0 - 1 = 0$	2
$2^1 - 1 = 1$	1

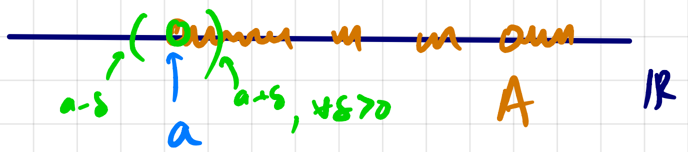


CAPÍTULO II

LIMITES DE FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL REAL:

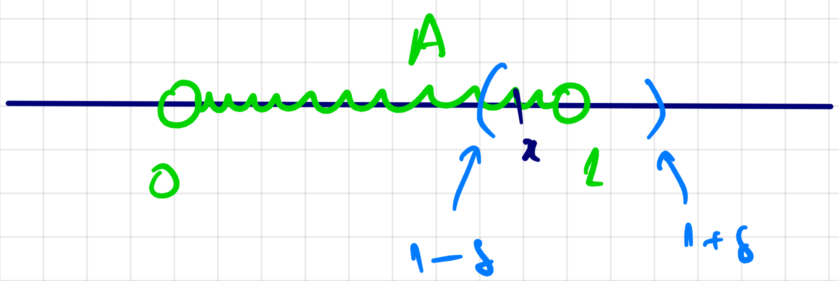
Def.: Seja $A \subset \mathbb{R}$ um conjunto não vazio em $\mathbb{R}$. Diremos que $a \in \mathbb{R}$ é um PONTO DE ACUMULAÇÃO do conj. A, se, $\forall\, \delta > 0$, tivermos $((a-\delta, a+\delta)\setminus\{a\}) \cap A \neq \emptyset$.

Em palavras: $a \in \mathbb{R}$ é um ponto de acumulação de um conjunto A, se qualquer intervalo centrado em a, exceto o próprio ponto a, tiver pontos em comum com o conjunto A.



Ex-1 $A = (0,1)$. Note que $1 \notin A$, mas 1 é ponto de acumulação de A, pois, $\forall\, \delta > 0$, temos

$$((1-\delta, 1+\delta)\setminus\{1\}) \cap (0,1) \neq \emptyset$$



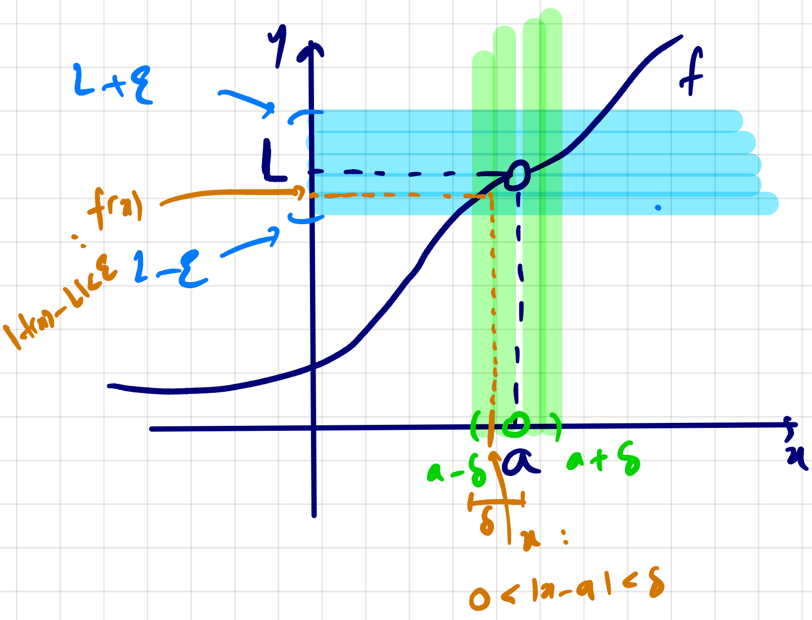
Ou seja, $\exists\, x \in ((1-\delta, 1+\delta)\setminus\{1\}) \cap A$

Do mesmo modo, 0 é ponto de acumulação do conj. $(0,1) = A$.

Def.: Seja $f: A \to \mathbb{R}$ uma função e $a \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação do conj. A. Dizemos que $L \in \mathbb{R}$ é o limite de $f(x)$ quando x tende para a, e escrevemos

$\lim_{x \to a} f(x) = L$, se e somente se:

$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0$ tal que; $\forall x \in A: 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$



DADO RAIO $\varepsilon > 0$, CONSTRÓI-SE O INTERVALO $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ ENTÃO VAI EXISTIR $\delta > 0$ TAL QUE, PODEMOS CONSTRUIR UM INTERVALO CENTRADO EM a, EXCETO a, $(a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}$, TAL QUE, QUALQUER x NESTE INTERVALO, E TEM-SE ENTÃO $0 < |x-a| < \delta$, É GARANTIDO QUE $f(x) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ i.e., $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Repare também que:

- $0 < |x-a| < \delta \iff |x-a| < \delta$ e $x \neq a$

$\iff -\delta < x-a < \delta$ e $x \neq a$.

$a - \delta < x < a + \delta$ e $x \neq a$.

- $|f(x) - L| < \varepsilon \iff -\varepsilon < f(x) - L < \varepsilon$

$\iff L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$

Na definição:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \overset{def}{\iff} \forall \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0 \text{ tal que, } \forall x \in A:$$

$$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon\,;$$

o δ depende somente de ε, i.e;

$$\delta = \delta(\varepsilon)$$

EXEMPLOS:

01) Seja $f: \mathbb{R}\setminus\{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x+3$.

Mostre que $\lim_{x\to 1} 2x+3 = 5$.

SOLUÇÃO: Dado $\varepsilon>0$, precisamos encontrar $\delta>0$ tal que, $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$ tal que $0<|x-1|<\delta$, implique em

$$|f(x) - 5| < \varepsilon.$$

Analisando $|f(x)-5|$, temos:

$$|f(x)-5| = |2x+3-5| = |2x-2| = |2(x-1)|$$

$$= 2.\underbrace{|x-1|}_{<\delta} < 2\delta := \varepsilon$$

Ou seja, basta tomar $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Assim, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ (a saber $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$), tal que $|f(x) - 5| < \varepsilon$, sempre que $0 < |x-1| < \delta$.

Ou seja, mostramos que

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 5.$$

$\square$

ILUSTRAÇÃO PARA ESTA SOLUÇÃO:

escolha $\varepsilon = 0{,}1 > 0$. Então, $\delta = \frac{0{,}1}{2} = 0{,}05 > 0$

Assim, $\forall x$ tal que

$$0 < |x - 1| < 0{,}05,$$ é

GARANTIDO que $|f(x) - 5| < 0{,}1$.

De fato, por exemplo, se $x = 0{,}997$.

Então: $0 < |0{,}997 - 1| = 0{,}003 < 0{,}05$;

Assim, tem-se que,

$$|f(x) - 5| = |f(0{,}997) - 5| =$$

$$= |2.(0{,}997) + 3 - 5|$$

$$= |-0{,}006| = 0{,}006 < 0{,}1 = \varepsilon.$$