CÁLCULO 1, T2:

04/07/24 – AULA 08

04) FUNÇÃO EXPONENCIAL:

Def.: Chama-se FUNÇÃO EXPONENCIAL a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = a^x$, onde $a > 0$ e $a \neq 1$.

E por quê deve-se exigir que $a > 0$ e $a \neq 1$?

Vamos observar que:

- se $a = 0$, teríamos
$$f(x) = 0^x = \begin{cases} 1, & \text{se } x = 0 \\ 0, & \text{se } x > 0 \\ \nexists & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Por isso devemos ter $a \neq 0$.

- se $a = 1$, teríamos:
$$f(x) = 1^x = 1$$ (FUNÇÃO CONSTANTE, JÁ ESTUDADA NA FUNÇÃO AFIM)

Por essa razão, descartamos o caso $a = 1$.

- se $a < 0$, não haverá valores reais de x aos quais a^x não tem sentido.

Por exemplo, se $a = -1 < 0$, tomando $x = \frac{3}{2}$, teríamos

$$f(x) = (-1)^x \underset{x = \frac{3}{2}}{\Longrightarrow} f\left(\frac{3}{2}\right) = (-1)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{(-1)^3} = \sqrt{-1} \notin \mathbb{R}$$

Por isso, não podemos assumir $a < 0$.

Conclusão: $f(x) = a^x$ só tem sentido se $a > 0$ e $a \neq 1$.

IMAGEM: Note que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $y = a^x > 0$

Então, $\operatorname{Im}(f) = (0, +\infty)$

A reta horizontal $y = 0$ é chamada de ASSÍNTOTA HORIZONTAL.

PROP.: A função exponencial $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$ é crescente se $a > 1$ e decrescente se $0 < a < 1$.

DEMONSTR.: Suponha $a > 1$.

Então: se $x < y \Rightarrow \exists\, m > 0$ tal que $x + m = y$

Assim:

$$f(y) = a^y = a^{x+m} = a^x \cdot \underbrace{a^m}_{a>1 \Rightarrow a^m > a^1 = a > 1} > a^x \cdot 1 = a^x = f(x)$$

Ou seja, $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$, $\forall x, y$; i.e., f é crescente.

Suponha agora que $0 < a < 1$. Então $\frac{1}{a} > 1$.

Assim, $g(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ é crescente, pelo feito anteriormente. Logo,

$$x < y \Rightarrow g(x) < g(y), \text{ i.e.,}$$

$$\left(\frac{1}{a}\right)^x < \left(\frac{1}{a}\right)^y \Rightarrow \frac{1}{a^x} < \frac{1}{a^y} \Rightarrow \underbrace{a^x}_{f(x)} > \underbrace{a^y}_{f(y)}$$

$$\Rightarrow f(x) > f(y)$$

Portanto, mostramos que, sendo $0 < a < 1$, então

$x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$, ou seja, f é decrescente. $\square$

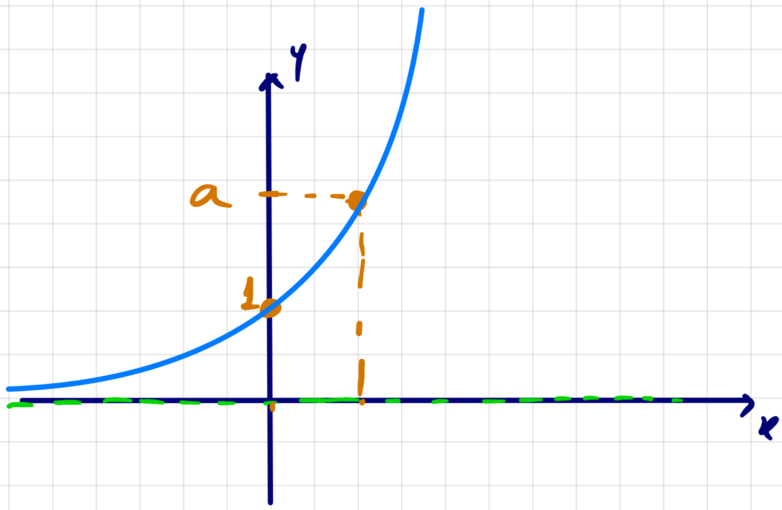
ESBOÇO GRÁFICO: $f(x) = a^x$; $a > 1$. (crescente)

$y = a^x > 0$, $\forall x$.

$Im(f) = (0, +\infty)$

ASSÍNTOTA HORIZONTAL: $y = 0$

x	$y = a^x$
0	$a^0 = 1$
1	a



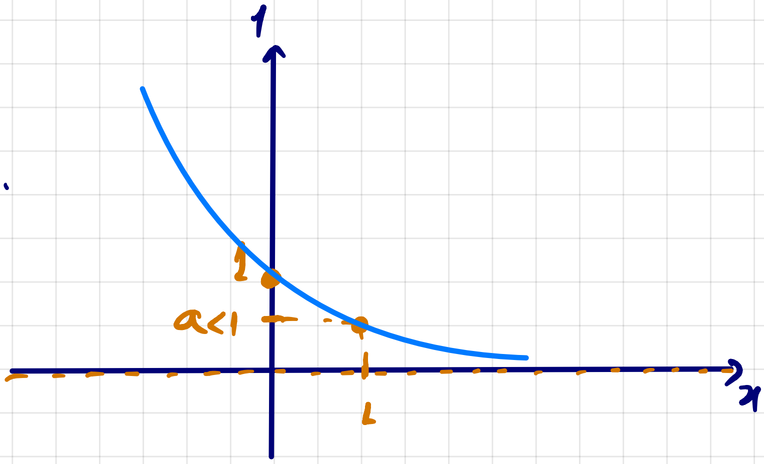
Se se tivermos $f(x) = a^x$, $0 < a < 1$ (decrescente);

$y = a^x > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

$Im(f) = (0, +\infty)$

$y = 0$ ASSÍNTOTA HORIZONTAL

x	$y = a^x$
0	$a^0 = 1$
1	$a^1 = a < 1$.



Vejamos alguns exemplos:

01) $f(x) = 2^x$.

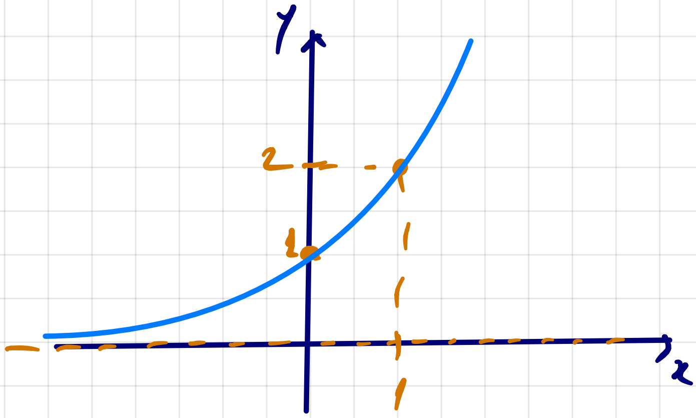
$y = 2^x > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Logo, $Im(f) = (0, +\infty)$

$y = 0 \Rightarrow$ ASSÍNTOTA HORIZONTAL

x	$y = 2^x$
0	$2^0 = 1$
1	$2^1 = 2$

$a = 2 > 1$ (crescente)



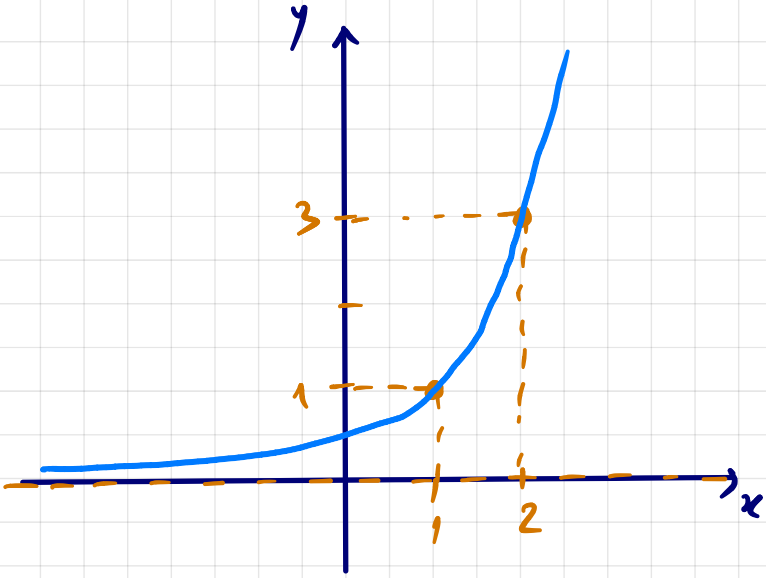
02) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{1-x}$.

$y = \left(\frac{1}{3}\right)^{1-x} > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$

Logo, $Im(f) = (0, +\infty)$

ASSÍNTOTA HORIZONTAL $y = 0$

x	$y = \left(\frac{1}{3}\right)^{1-x}$
1	$\left(\frac{1}{3}\right)^0 = 1$
+2	$\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = 3$



03) $f(x) = 1 - 2^{1-2x}$.

$a^{\beta} > 0$

$a > 0$

$a \neq 1$.

$$y = 1 - 2^{1-2x}$$

$$y - 1 = -2^{1-2x} \quad (\times -1)$$

$$-y + 1 = 2^{1-2x} > 0 \Rightarrow -y + 1 > 0$$

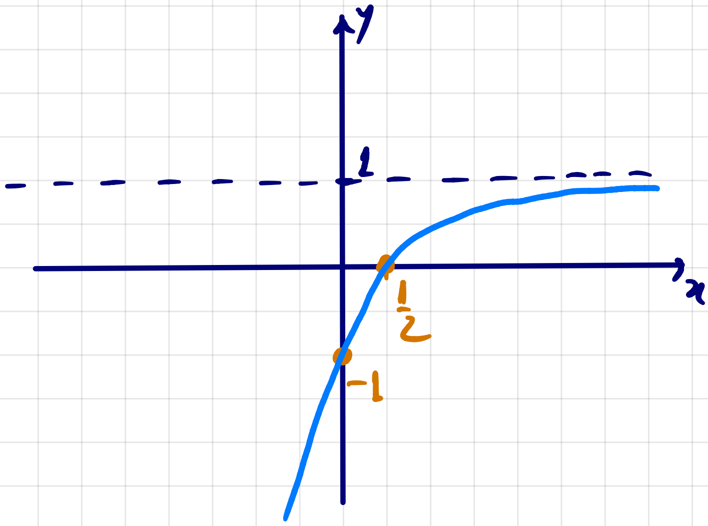
$$\Rightarrow -y > -1$$

$$\Rightarrow y < 1.$$

$$\mathrm{Im}(f) = (-\infty, 1).$$

ASSÍNTOTA HORIZONTAL: $y = 1$.

x	$y = 1 - 2^{1-2x}$
0	$1 - 2^{1} = -1$
$\frac{1}{2}$	$1 - 2^{1-2\cdot\frac{1}{2}} = 1 - 2^{1-1} = 0$



0a) $f(x) = \left| 1 - 2^{x+1} \right|$

1º: considere $y = 1 - 2^{x+1}$.

$$y - 1 = -2^{x+1} \underset{(\times -1)}{\Rightarrow} 1 - y = 2^{x+1} > 0$$

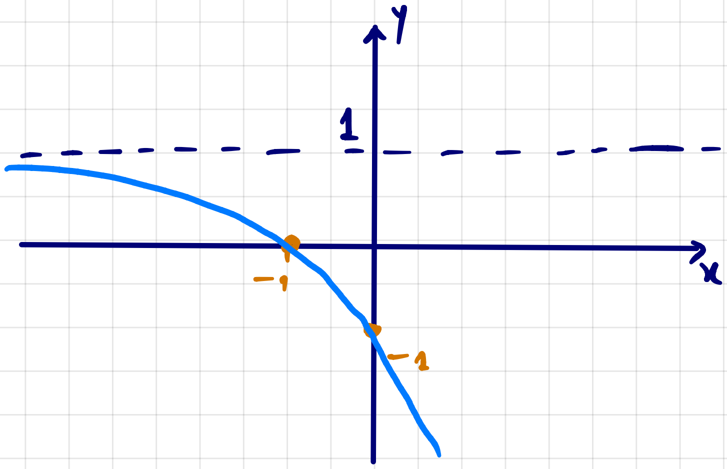
x	$y = 1 - 2^{x+1}$
-1	$1 - 2^0 = 0$
0	$1 - 2^1 = -1$

$1 - y > 0$

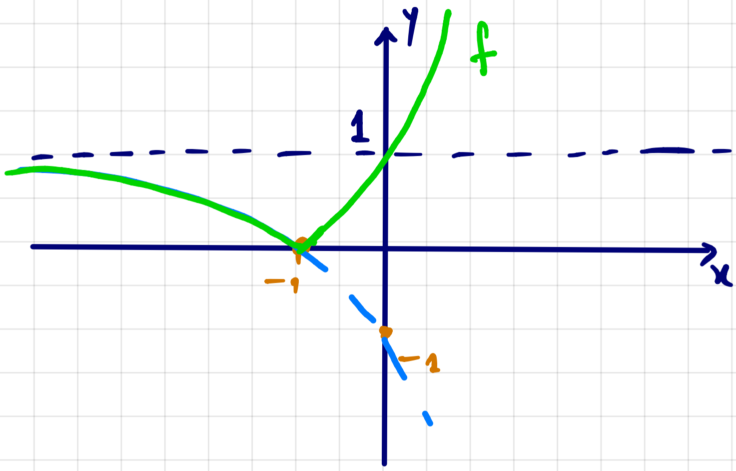
$\Rightarrow -y > -1 \Rightarrow y < 1.$

$Im(f) = (-\infty, 1)$

$y = 1$ (ASSINTOTA HORIZONTAL)



2º: $y = \left| 1 - 2^{x+1} \right|$; ou seja, "passando o módulo"



05) $f(x) = 1 - 2^{|x+1|}$

$$|x+1| = \begin{cases} x+1, & \text{se } x+1 \geqslant 0 \\ -(x+1), & \text{se } x+1 < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x+1, & \text{se } x \geqslant -1 \\ -x-1, & \text{se } x < -1 \end{cases}$$

Assim, teremos:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - 2^{x+1}, & \text{se } x \geqslant -1 \\ 1 - 2^{-x-1}, & \text{se } x < -1 \end{cases}$$

$\underline{\underline{1^o}}$: $y = 1 - 2^{x+1}$; $x \geqslant -1$. (vimos no exemplo acima)

$$y - 1 = -2^{x+1} \underset{(x-1)}{\Rightarrow} -y + 1 = 2^{x+1} > 0$$

$$\Rightarrow -y + 1 > 0$$

$$\Rightarrow -y > -1$$

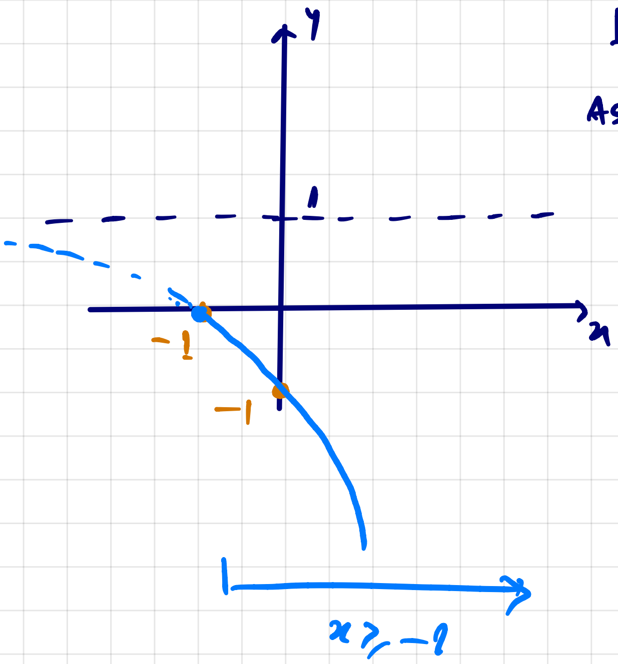
$$\Rightarrow y < 1$$

$Im(f) = (-\infty, 1)$

Assíntota horizontal:

$y = 1$.

x	$y = 1 - 2^{x+1}$
0	$1 - 2^1 = -1$
-1	$1 - 2^0 = 0$



2º: $y = 1 - 2^{-x-1}$; $x < -1$.

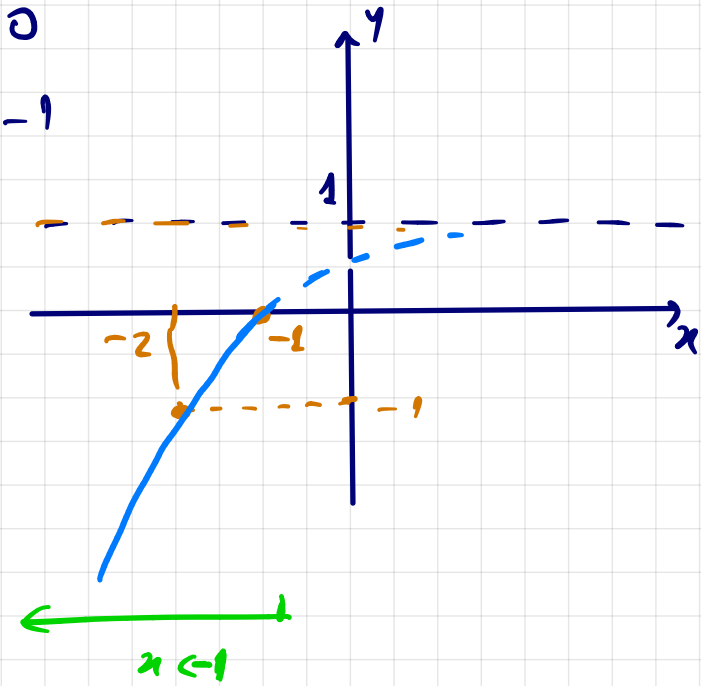
$$y - 1 = -2^{-x-1} \underset{(\times -1)}{\Rightarrow} 1 - y = 2^{-x-1} > 0 \Rightarrow 1 - y > 0$$

$$-y > -1$$

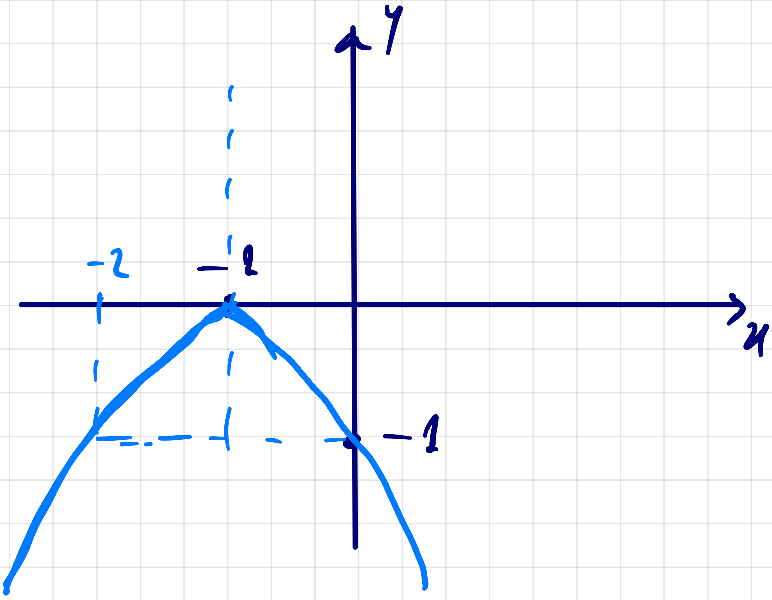
$$\Rightarrow y < 1$$

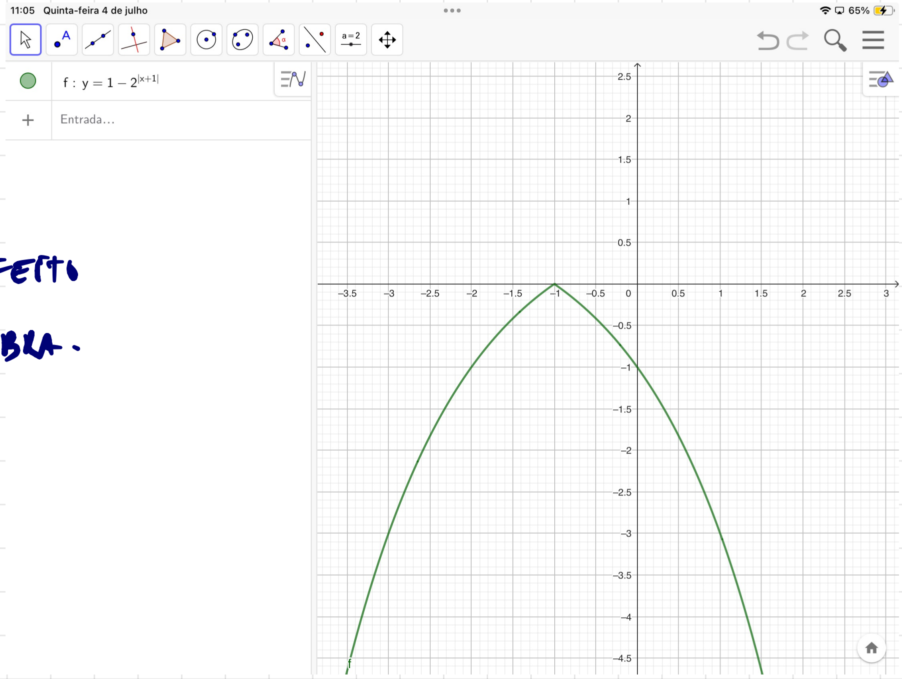
ASSÍNTOTA HORIZONTAL: $y = 1$.

x	$y = 1 - 2^{-x-1}$
-1	$1 - 2^0 = 0$
-2	$1 - 2^1 = -1$



Esboço gráfico final:





ESBOÇO GRÁFICO FEITO PELO GEOGEBRA.

LOGARITMOS:

Def: Sejam $a > 0$ e $b > 0$, $b \neq 1$. Chama-se LOGARITMO DE a NA BASE b, ao expoente $c \in \mathbb{R}$ ao qual se deve elevar a base b de modo a obter o número a.

Simbolicamente

$$c = \log_b a \overset{\text{def.}}{\iff} \underbrace{b^c = a}.$$

notação exponencial para o logaritmo.

Da notação exponencial justificam-se as exigências $a > 0$ e $b > 0$ e $b \neq 1$.

Ex: 3 é o logaritmo de 8 na base 2, pois: $3 = \log_2 8 \overset{\text{def.}}{\iff} 2^3 = 8$.

PROPOSIÇÃO: Valem as seguintes propriedades:

01) $\log_b 1 = 0$

02) $\log_a a = 1$.

03) $a^{\log_a b} = b$

04) $\log_a a^m = m$

05) $\log_c a.b = \log_c a + \log_c b$

06) $\log_c \frac{a}{b} = \log_c a - \log_c b$

07) $\log_b a^m = m.\log_b a$

→ estas três são chamadas de PROPRIEDADES OPERATÓRIAS dos logaritmos.

08) $a = b \iff \log_c a = \log_c b$.

DEMONSTRAÇÃO:

01) $\log_a 1 = 0$:

Escreva $\log_a 1 = x$. Então

$$\log_a 1 = x \overset{def}{\iff} a^x = 1 = a^0 \iff x = 0.$$

Portanto, $\log_a 1 = 0$.

02) $\log_a a = 1$:

De fato, escreva $\log_a a = x \overset{\text{def.}}{\iff} a^x = a^1$

$\iff x = 1.$

Portanto, $\log_a a = 1$.

03) $a^{\log_a b} = b$.

Escreva $\underline{\underline{w = \log_a b}} \iff a^w = b$.

$\iff a^{\log_a b} = b$.

04) $\log_a a^m = m$

Escreva $\log_a a^m = x$. Então:

$\log_a a^m = x \overset{\text{def.}}{\iff} a^x = a^m \iff x = m.$

Portanto, $\log_a a^m = x = m$.

05) $\log_c a.b = \log_c a + \log_c b$:

Escrevemos

$$\left.\begin{array}{l}\log_c a.b = x \\ \log_c a = y \\ \log_c b = z\end{array}\right\}$$

Vamos mostrar que $x = y + z$.

De fato:

$$\log_c ab = x \overset{\text{def.}}{\iff} \boxed{c^x = a.b} \quad (\mathrm{I});$$

$$\log_c a = y \overset{\text{def.}}{\iff} \boxed{c^y = a} \quad (\mathrm{II});$$

$$\log_c b = z \overset{\text{def}}{\iff} \boxed{c^z = b} \quad (\mathrm{III})$$

Combinando (I), (II) e (III), vem:

$$c^x = a.b = c^y . c^z = c^{y+z} \iff x = y + z,$$

o que prova 05.

As demonstrações das demais propriedades ficam como exercício.