CÁLCULO 1, T1.

$\boxed{16/07/24 - \text{AULA } 18}$

DE UMA PROVA ANTERIOR:

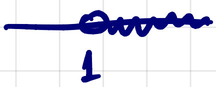
Questão 02. Determine o domínio D da função $f : D \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}} - (3x-1)\ln\frac{x-1}{4-x} - \frac{4}{3x-5}.$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}} - (3x-1).\left[\ln(x-1) - \ln(4-x)\right] - \frac{4}{3x-5}$$

condições de existência:

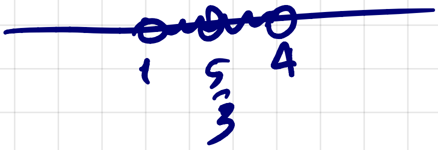
$x - 1 > 0 \to x > 1.$



$x - 1 > 0$

$4 - x > 0 \to -x > -4 \xrightarrow{(x-1)} x < 4$

$3x - 5 \neq 0 \to 3x \neq 5 \to x \neq \frac{5}{3}$



$D(f) = (1, 4) \setminus \{\frac{5}{3}\}.$

Questão 03. Sejam f e g funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definidas, respectivamente, por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 4, & \text{se} \quad x \geq 1 \\ 3x + 4, & \text{se} \quad x < 1 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad g(x) = x - 3.$$

Obtenha a lei que define $f \circ g$. Em seguida, faça seu esboço gráfico. Esta função é bijetiva? Justifique.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x-3) = \begin{cases} (x-3)^2 + 2(x-3) + 4, & \text{se } x - 3 \geq 1 \\ 3.(x-3) + 4, & \text{se } x - 3 < 1. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x^2 - 6x + 9 + 2x - 6 + 4, & \text{se } x \geq 4 \\ 3x - 9 + 4, & \text{se } x < 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (f\circ g)(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 7, & \text{se } x \geq 4 \\ 3x - 5, & \text{se } x < 4. \end{cases}$$

$f\circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$ gráfico?

$$V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right) \qquad x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-4)}{2\cdot 1} = 2$$

$$y_V = f(x_V) = (2)^2 - 4\cdot(2) + 7$$
$$= 4 - 8 + 7 = 3$$

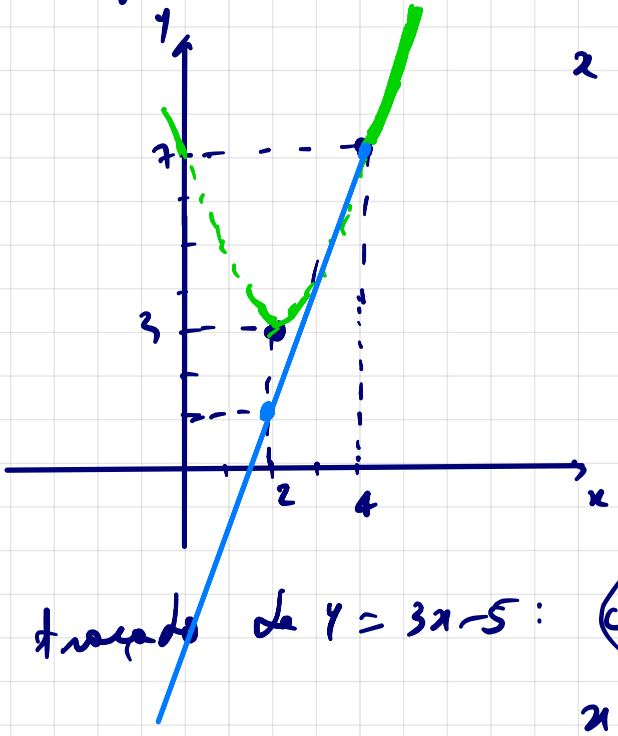
$$V(2, 3)$$

zeros (da parábola): $x^2 - 4x + 7 = 0$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 28}}{2} \notin \mathbb{R}.$$

c.p.c, pois $a = 1 > 0$

$\underline{x = 4}$; a imagem na parábola será: $f(4) = 4^2 - 4\cdot 4 + 7 = 7$



traçado da $y = 3x - 5$: (cresc. pois $a = 3 > 0$)

x	y
4	7
2	1

$f\circ g$ é bijetiva, pois é crescente (logo, inj.) e

$Im(f\circ g) = \mathbb{R} = CD(f\circ g)$, logo, sobrejetiva também.

L3

4. Usando a definição de limite, prove que

(a) $\lim_{x\to 2} x^2 = 4$ (b) $\lim_{x\to 4} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{3}$ (c) $\lim_{x\to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$, $a > 0$ (d) $\lim_{x\to 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0$.

(a) $\lim_{x\to 2} x^2 = 4$

Dado $\varepsilon > 0$, precisamos encontrar $\delta > 0$, tal que, $\forall x \in D(f)$, tal que $0 < |x-2| < \delta$, implique em $|f(x) - 4| < \varepsilon$.

Analisando $|f(x) - 4|$:

$$|f(x) - 4| = |x^2 - 4| = |(x+2)(x-2)| = |x+2| \cdot \underbrace{|x-2|}_{<\delta} < |x+2| \cdot \delta$$

Note que

$$|x+2| = |(x-2)+4| \leq \overbrace{|x-2|}^{<\delta} + |4| < \delta + 4$$

$|a \pm b| \leq |a| + |b|$

Então:

$$|f(x) - 4| < \underbrace{|x+2|}_{<\delta+4} \cdot \delta < (\delta + 4) \cdot \delta = \delta^2 + 4\delta := \varepsilon$$

$$\delta^2 + 4\delta = \varepsilon$$

$$\underbrace{\delta^2 + 4\delta + 4}_{} - 4 = \varepsilon$$

$$(\delta + 2)^2 = \varepsilon + 4$$

$$\delta + 2 = \sqrt{\varepsilon + 4}$$

$$\delta = \sqrt{\varepsilon + 4} - 2 > 0$$

$\square$

(c) $\lim\limits_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$; $a > 0$

Dado $\varepsilon > 0$, precisamos encontrar $\delta > 0$, tal que, $\forall x \in D(f)$; tal que $0 < |x-a| < \delta$, implique em $|f(x) - \sqrt{a}| < \varepsilon$.

$$|f(x) - \sqrt{a}| = |\sqrt{x} - \sqrt{a}| = \left| (\sqrt{x} - \sqrt{a}) \cdot \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{a})}{(\sqrt{x} + \sqrt{a})} \right| =$$

ISTO PARA APARECER

$(p-q)(p+q) = p^2 - q^2$

$$= \left| \frac{(\sqrt{x})^2 - (\sqrt{a})^2}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \right| = \left| \frac{x-a}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \right| = \frac{\overbrace{|x-a|}^{< \delta}}{|\sqrt{x} + \sqrt{a}|} < \frac{\delta}{|\sqrt{x} + \sqrt{a}|}$$

Note que

$$|\sqrt{x} + \sqrt{a}| \geq \sqrt{x} + \sqrt{a} \geq \sqrt{a}. \implies \frac{1}{|\sqrt{x} + \sqrt{a}|} \leq \frac{1}{\sqrt{a}}$$

Assim, obtemos:

$$|f(x) - \sqrt{a}| < \frac{\delta}{|\sqrt{x} + \sqrt{a}|} \leq \frac{\delta}{\sqrt{a}} := \varepsilon$$

Logo, basta tomar $\boxed{\delta = \sqrt{a} \cdot \varepsilon}$

L3 :

7. Use a propriedade do limite de um quociente visto em aula para provar que se $\lim_{x\to a} f(x)$ existir e for diferente de zero, então

$$\lim_{x\to a}\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{\lim_{x\to a} f(x)}.$$

Lembre que: $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$.

Disso:

$$\lim_{x\to a}\frac{1}{f(x)}=\frac{\lim_{x\to a} 1}{\lim_{x\to a} f(x)}=\frac{1}{\lim_{x\to a} f(x)}.$$

$\square$

L3.

09) (f) $\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}$

Lembre que:

$$x^1-a^1=x-a$$

$$x^2-a^2=(x-a)(x+a)$$

$$x^3-a^3=(x-a)(x^2+xa+a^2)$$

$$x^4-a^4=(x-a).(x^3+x^2a+xa^2+a^3)$$

$$x^5-a^5=(x-a).(x^4+x^3a+x^2a^2+xa^3+a^4)$$

$$\begin{array}{r|l} x^3-a^3 & x-a \\ \cline{2-2} -x^3+x^2a & x^2+xa+a^2 \\ \hline x^2a-a^3 & \\ -x^2a+xa^2 & \\ \hline xa^2-a^3 & \\ -xa^2+a^3 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$\Downarrow$

$$\boxed{x^n-a^n=(x-a).\,(\underbrace{x^{n-1}+x^{n-2}.a+x^{n-3}.a^2+\dots+a^{n-1}}_{n\ \text{aditivos}})}$$

Dessa forma, vamos encontrar:

$$\lim_{x\to a} \frac{x^n - a^n}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{\cancel{(x-a)}.\,(x^{n-1} + x^{n-2}.a + x^{n-3}a^2 + \cdots + a^{n-1})}{\cancel{x-a}}.$$

$$= \lim_{x\to a} \left(x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + \cdots + x\,a^{n-2} + a^{n-1}\right)$$

$$= a^{n-1} + \underline{a^{n-2}.a} + a^{n-3}.a^2 + \cdots + a.a^{n-2} + a^{n-1}$$

$$= \underbrace{a^{n-1} + a^{n-1} + a^{n-1} + \cdots + a^{n-1}}_{n \text{ aditivos}} = \underline{n.a^{n-1}}$$

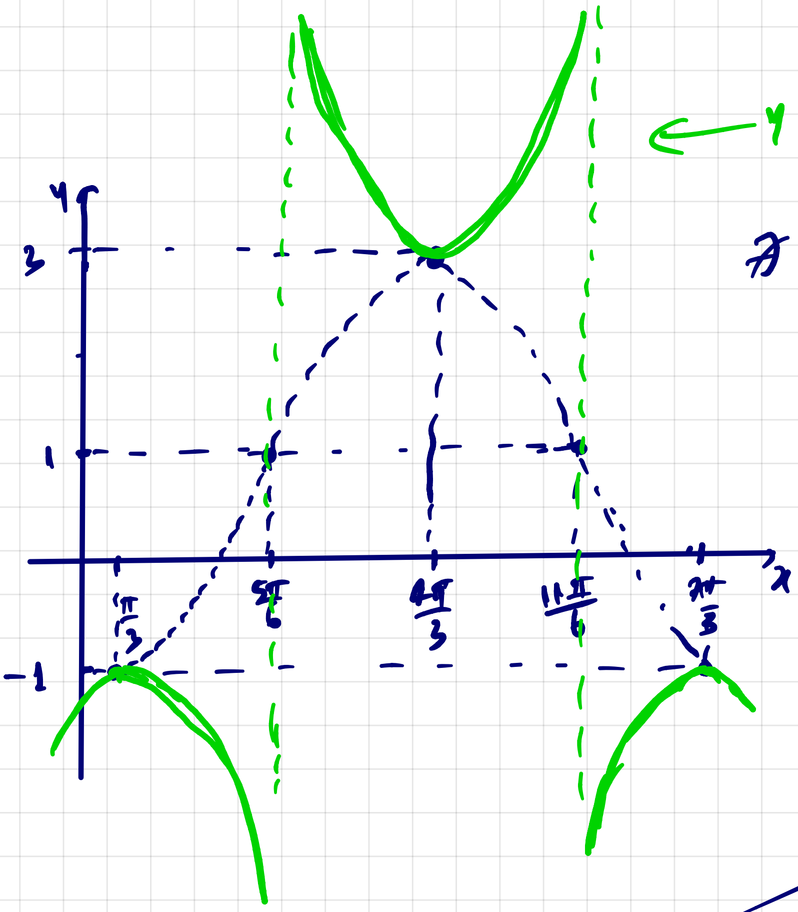
L3 01) f) $f(x) = 1 - 2\sec\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

1º: considere montar o gráfico de $y = 1 - 2.\cos(\underbrace{x - \frac{\pi}{3}}_{t})$.

Escreva $t = x - \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = t + \frac{\pi}{3}$

$$y = 1 - 2.\cos t$$

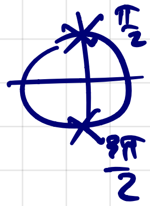
t	$y = 1 - 2\cos t$	$x = t + \frac{\pi}{3}$
0	$1 - 2\cos 0 = -1$	$0 + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{6}$
$\frac{\pi}{2}$	$1 - 2.\cos\frac{\pi}{2} = 1$	$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi + 2\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$
π	$1 - 2.\cos\pi = 3$	$\frac{8\pi}{6} = \frac{4\pi}{3}$
$\frac{3\pi}{2}$	$1 - 2\cos\frac{3\pi}{2} = 1$	$\frac{11\pi}{6}$
2π	$1 - 2\cos 2\pi = -1$	$\frac{14\pi}{6} = \frac{7\pi}{3}$



$\leftarrow y = 1 - 2\sec\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

∄ sec onde cosseno é zero.

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$$



o arco deve ser diferente de

$k\pi + \frac{\pi}{2}$, $\forall z \in \mathbb{Z}$.

ou seja, teremos:

$$x - \frac{\pi}{3} \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

$$\Longleftrightarrow \quad x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

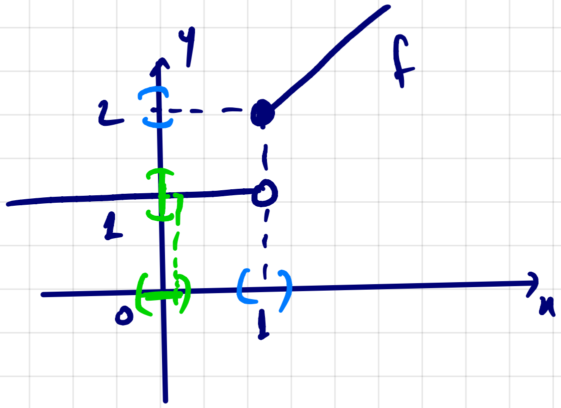
$$x \neq k\pi + \frac{5\pi}{6}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

$$\Rightarrow D(f) = \left\{ x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi + \frac{5\pi}{6}, \ \forall k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$Im(f) = (-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$$

$$P = \frac{7\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = 2\pi$$

EXTRA:



$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \nexists$$

L2

32) (d) $\dfrac{\tan\theta + \sec\theta - 1}{\tan\theta - \sec\theta + 1} = \tan\theta + \sec\theta.$

$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta.$

$\tan^2\theta - \sec^2\theta = -1$

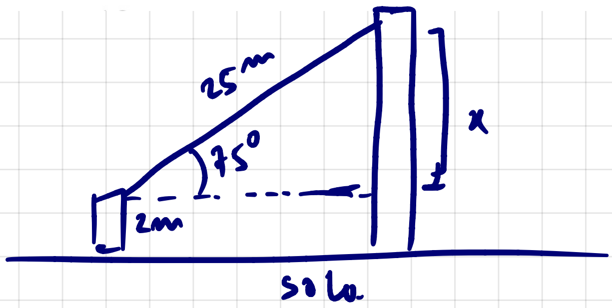
$$\frac{\tan\theta + \sec\theta - 1}{\tan\theta - \sec\theta + 1} = \frac{\tan\theta + \sec\theta + \tan^2\theta - \sec^2\theta}{\tan\theta - \sec\theta + 1} =$$

$$= \frac{\tan\theta + \sec\theta + (\tan\theta + \sec\theta)\cdot(\tan\theta - \sec\theta)}{\tan\theta - \sec\theta + 1} =$$

$$= \frac{(\tan\theta + \sec\theta)\cdot\left[\cancel{1 + \tan\theta - \sec\theta}\right]}{\cancel{\tan\theta - \sec\theta + 1}} = \tan\theta + \sec\theta.$$

L2

40. Uma escada de um bombeiro pode ser extendida até um comprimento máximo de 25m, formando um ângulo de 75° com a base, que está apoiada sobre um caminhão, a 2m do solo. Qual á altura máxima que a escada atinge.



$$h = x + 2$$

$$\operatorname{sen} 75° = \frac{x}{25} \Rightarrow x = 25 \cdot \operatorname{sen} 75°.$$

$$\operatorname{sen} 75° = \operatorname{sen}(30° + 45°) = \operatorname{sen} 30° \cdot \cos 45° + \operatorname{sen} 45° \cdot \cos 30°$$

$$\boxed{\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\beta + \operatorname{sen}\beta \cdot \cos\alpha}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

$$x = 25 \cdot \left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \right)$$

Portanto, $h = 25\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right) + 2$ m.

EXTRA: Mostre que $\log_2 3$ é irracional.

SOLUÇÃO: Por absurdo, suponha que $\log_2 3$ seja racional. Assim, $\exists\, p, q \in \mathbb{N}$ tais que

$$\log_2 3 = \frac{p}{q}, \quad \text{com } mdc(p, q) = 1.$$

$$\Leftrightarrow \left((2)^{\frac{p}{q}} \right)^{q} = 3^{q} \Leftrightarrow 2^{p} = 3^{q}$$, impossível com $p, q \in \mathbb{N}$.

Absurdo!

Portanto, $\log_2 3$ é irracional.