CÁLCULO 1, T1

$\boxed{13/07/24 - \text{AULA 17}}$

AULA DE EXERCÍCIOS.

L2 13. Considere um polígono regular de n lados com medida de cada lado igual a ℓ, inscrito numa circunferência de raio R. Da Geometria sabemos que, se traçarmos todas as diagonais desse polígono, formaremos n triângulos isósceles.

(a) Destacando um desses triângulos isósceles do polígono regular, considerando o vértice onde está o centro da circnferência, conclua que a medida de seu ângulo interno, em radianos, é dada por $\frac{2\pi}{n}$.

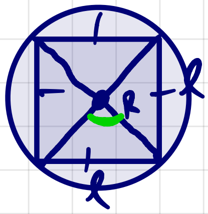
(b) Mostre que a área A_n do polígono regular de n lados pode ser determinada pela fórmula

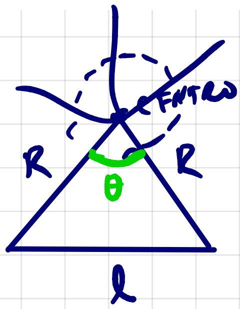
$$A_n = \frac{n \cdot \ell^2}{4 \cdot \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}.$$

(c) Usando a fórmula acima, encontre as fórmulas para determinar a área de um quadrado de lado ℓ, de um triângulo equilátero de lado ℓ e de um hexágono regular de lado ℓ.

(d) Considerando que $\cos 36° = \frac{\varphi}{2}$, onde $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ é o número de ouro, determine uma fórmula para calcular a área de um pentágono regular.

(a)



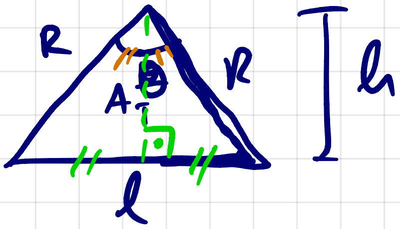


mostrar: $\theta = \frac{2\pi}{n}$. De fato, são n triângulos isósceles com o vértice dos lados congruentes no centro da circunferência.

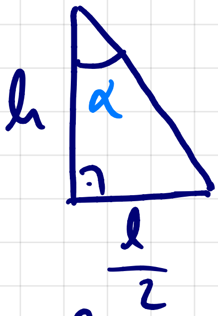
$$2\pi \text{ rad} = n \cdot \theta. \implies \boxed{\theta = \frac{2\pi}{n}.}$$

(b) Sendo A_T a área de um dos n triângulos isósceles que forma o polígono, então a área A_n desse polígono regular de n lados será dada por.

$$A_n = n \cdot A_T$$



$$A_T = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{l\, h}{2}$$



$$\alpha = \frac{\theta}{2} = \frac{\frac{\cancel{2}\pi}{n}}{\cancel{2}}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{n}$$

Disso, obtemos:

$$\tan\alpha = \frac{\frac{l}{2}}{h}$$

$$h = \frac{\frac{l}{2}}{\tan\alpha} = \frac{l}{2 \cdot \tan\alpha} = \frac{l}{2 \cdot \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}$$

Assim, teremos:

$$A_T = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{l \cdot \frac{l}{2\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}}{2} =$$

$$= \frac{l^2}{2\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)} \cdot \frac{1}{2} = \frac{l^2}{4 \cdot \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}$$

Portanto, a área A_n será dada por:

$$A_n = n \cdot A_T = n \cdot \frac{l^2}{4 \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}$$

(c) $A_3 = ?$ $A_4 = ?$ $A_6 = ?$

$$A_3 = \frac{3 \cdot l^2}{4 \tan\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{3l^2}{4 \cdot \sqrt{3}} = \frac{3l^2}{4 \cdot \sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\cancel{3}l^2\sqrt{3}}{4 \cdot \cancel{3}}$$

$\left(\tan\frac{\pi}{3} = \tan 60° = \sqrt{3}\right)$

$$\boxed{A_3 = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}}$$

$$A_4 = \frac{\cancel{4}\cdot \ell^2}{\cancel{4}\cdot \underbrace{\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}_{=1}} = \ell^2 \Rightarrow \boxed{A_4 = \ell^2}$$

$$A_6 = \frac{\overset{3}{\cancel{6}}\cdot \ell^2}{\underset{2}{\cancel{4}}\cdot \underbrace{\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)}_{\frac{\sqrt{3}}{3}}} = \frac{3\ell^2}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}} = 3\ell^2 \times \frac{3}{2\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{3\cdot\cancel{2}\,\ell^2\sqrt{3}}{2\cdot\cancel{3}} = \frac{3\ell^2\sqrt{3}}{2}$$

(d) $\cos 36° = \frac{\varphi}{2}$; $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$$A_5 = \frac{5\cdot \ell^2}{4\cdot\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)} \quad (*)$$

$$\frac{\pi}{5} \equiv \frac{180°}{5} = 36° . \quad \tan\frac{\pi}{5} = \tan 36° = \frac{\operatorname{sen} 36°}{\cos 36°}$$

$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$ (Relação Trig. fundamental)

$$\operatorname{sen}^2 36° + \cos^2 36° = 1$$

$$\operatorname{sen}^2 36° = 1 - \cos^2 36°$$

$$\operatorname{sen} 36° = +\sqrt{1-\cos^2 36°} = \sqrt{1-\left(\frac{\varphi}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{1-\frac{\varphi^2}{4}} = \sqrt{\frac{4-\varphi^2}{4}}$$

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \to \varphi^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4}$$

$$\varphi^2 = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

Portanto:

$$\operatorname{sen} 36° = \sqrt{\frac{4-\varphi^2}{4}} = \sqrt{\frac{4-\frac{3+\sqrt{5}}{2}}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{\frac{8-3-\sqrt{5}}{2}}{4}} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$$

Disso, segue que:

$$\tan 36° = \frac{\operatorname{sen} 36°}{\cos 36°} = \frac{\frac{1}{\cancel{2}}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}}{\frac{\varphi}{\cancel{2}}} = \frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{\sqrt{2}\,\varphi}$$

Assim, (*) fica:

$$A_5 = \frac{5\cdot \ell^2}{4\cdot \tan\left(\frac{\pi}{5}\right)} = \frac{5\cdot \ell^2}{4\cdot \frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{\sqrt{2}\,\varphi}} = \frac{5\ell^2\cdot\sqrt{2}\,\varphi}{4\sqrt{5-\sqrt{5}}}$$

L2: 45. Prove que $\operatorname{sen}^4 x = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x$.

$$\operatorname{sen}^4 x = (\operatorname{sen}^2 x)^2$$

lembre das fórmulas:

$$\operatorname{sen}\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} \quad ; \quad \cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$$

Disso:

$$\operatorname{sen} x = \sqrt{\frac{1-\cos 2x}{2}} \Rightarrow \boxed{\operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}}$$

Portanto:

$$\underline{\text{sen}^4 x} = (\text{sen}^2 x)^2 = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\cdot\left(1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x\right)$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\underline{\cos^2 2x} =$$

$$\cos^2\theta = \frac{1+\cos\theta}{2}$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1+\cos 4x}{2}\right)$$

$$= \underline{\frac{1}{4}} - \frac{1}{2}\cos 2x + \underline{\frac{1}{8}} + \frac{1}{8}\cos 4x$$

$$\underline{\frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x.}$$

L2: 46. Calcule o valor de $y = \cos 112,5^\circ \cdot \cot 165^\circ$.

Note que $112,5^\circ = \frac{225^\circ}{2}$ (é visto como um arco-metade)

Disso:

$$\underline{\cos 112,5^\circ} = -\sqrt{\frac{1+\cos 225^\circ}{2}} = -\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = -\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

∈ 2º q.

e o cosseno é negativo no 2º q.

225° ∈ 3º q. ⟶ 1º q.

$225^\circ - 180^\circ = 45^\circ$

Então:

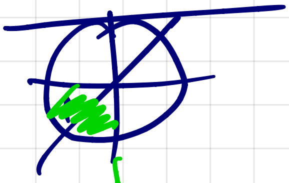
$$\cos 225^\circ = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Além disso:

$165° \in 2^{\underline{o}}q.$ $\qquad 2^{\underline{o}}q \longrightarrow 1^{\underline{o}}q.$

$180° - 165° = 15°$

$\cot 165° = + \cot(180° - 165°) = \cot 15°$



$\tan 15° = ?$

$\tan 15° = \tan(60° - 45°) = \dfrac{\tan 60° - \tan 45°}{1 + \tan 60° \cdot \tan 45°}$

$\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$

$= \dfrac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3} \cdot 1} = \dfrac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1}$

$\Longrightarrow \cot 15° = \dfrac{1}{\tan 15°} = \dfrac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1}$

Por fim, obtemos:

$y = \cos 112{,}5° \cdot \cot 15° = -\dfrac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1}$.