CÁLCULO I, T1.

11/07/24 – AULA 16

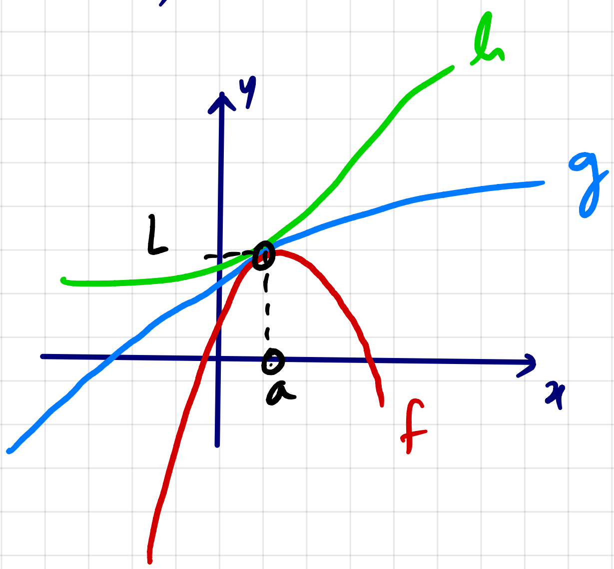
AULA EXTRA PELO E-AULA: SÁBADO, A PARTIR DAS 15h.

(será uma aula de resolução de exercícios/esclarecimentos de dúvidas).

TEOREMA DO SANDUÍCHE: Sejam $f, g, h : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções tais que $\forall x \in A$, tem-se $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$; e seja $a \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação do conjunto A.

Se $\lim_{x \to a} f(x) = L$ e $\lim_{x \to a} h(x) = L$, então

$$\lim_{x \to a} g(x) = L.$$



DEMONSTR.: Dado $\varepsilon > 0$.

Como $\lim_{x \to a} f(x) = L$, segue que $\exists \delta_1 > 0$, tal que,

$$\forall x \in A : 0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \quad (*)$$

Do mesmo modo, como $\lim_{x \to a} h(x) = L$, segue que

$\exists \delta_2 > 0$, tal que, $\forall x \in A$:

$$0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |h(x) - L| < \varepsilon. \quad (**)$$

Tome $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$. Então,

$\forall x \in A$ tal que $0 < |x - a| < \delta$, valem $(*)$ e $(**)$,

ou seja, valem:

$$|f(x) - L| < \varepsilon \qquad \text{e} \qquad |h(x) - L| < \varepsilon.$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad\qquad \Updownarrow$$

$$-\varepsilon < f(x) - L < \varepsilon \qquad\qquad -\varepsilon < h(x) - L < \varepsilon$$

Além disso, temos que, $\forall x \in A$;

$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, subtraindo L, vem:

$$-\varepsilon < f(x) - L \leq g(x) - L \leq h(x) - L < \varepsilon$$

Ou seja, concluímos que, $\forall x \in A$ tal que $0 < |x - a| < \delta$, então

$-\varepsilon < g(x) - L < \varepsilon$, i.e., $|g(x) - L| < \varepsilon$,

ou seja, mostramos que

$$\lim_{x \to a} g(x) = L.$$

$\square$

Ex.: L3

ERRATUM.

12. Seja f uma função tal que para todo $x \neq 1$, $-x^2 + 3x \leq f(x) < \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$. Calcule $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ e justifique.

Solução. Vamos usar o T. do Sanduíche.

Note que: $\forall x \neq 1$

$$-x^2 + 3x \leq f(x) < \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

Temos que:

- $\lim\limits_{x\to 1} -x^2+3x = -(1)^2+3\cdot(+1) = -1+3 = 2$

- $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x+1)\cdot\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} = \lim\limits_{x\to 1} (x+1) = 2$

Assim:

$$\underbrace{-x^2+3x}_{\xrightarrow{x\to 1}\ 2} \le \underset{\downarrow\ 2}{f(x)} \le \underbrace{\frac{x^2-1}{x-1}}_{\xrightarrow{x\to 1}\ 2} \Longrightarrow \lim_{x\to 1} f(x) = 2$$

INDETERMINAÇÃO DO TIPO $\frac{0}{0}$:

Já vimos alguns casos em que ocorre o símbolo $\frac{0}{0}$. Este é um símbolo de indeterminação.

Toda vez que, dado $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, for tal que $f(a)=g(a)=0$, obtemos $\frac{0}{0}$, o que significa que em $f(a)$ e em $g(a)$ há um fator da forma $(x-a)$, que deve ser simplificado, de modo a retirar a indeterminação.

Vejamos exemplos:

01) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4} = ?$ $\ 0/0$ (INDET.)

ISTO SIGNIFICA QUE EXISTE O FATOR $x-2$ NO NUMERADOR E NO DENOMINADOR.
VAMOS EFETUAR DIVISÃO DE POLINÔMIOS:

$$
\begin{array}{l|l}
\cancel{x^2} - 5x + 6 & x - 2 \\ \hline
-\cancel{x^2} + 2x & x - 3 \\ \hline
-\cancel{3x} + \cancel{6} & \\
+\cancel{3x} - \cancel{6} & \\ \hline
0 &
\end{array}
\quad \Rightarrow \quad x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)
$$

$$
\begin{array}{l|l}
\cancel{x^2} - 4 & x - 2 \\ \hline
-\cancel{x^2} + 2x & x + 2 \\ \hline
2x - \cancel{4} & \\
-2x + \cancel{4} & \\ \hline
0 &
\end{array}
\quad \Rightarrow \quad x^2 - 4 = (x-2)\cdot(x+2)
$$

Com isso, obtemos:

$$
\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4} = \lim_{x \to 2} \frac{\cancel{(x-2)} \cdot (x-3)}{\cancel{(x-2)} \cdot (x+2)} = \lim_{x \to 2} \frac{x-3}{x+2} = \frac{2-3}{2+2} = -\frac{1}{4}
$$

---

02) $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 1}{2x^2 - x - 1} = ?$

$$
\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{2x^2 - x - 1} = \frac{0}{0} \text{ (INDET.)}
$$

$$
\begin{array}{l|l}
\cancel{x^3} - 1 & x - 1 \\ \hline
-\cancel{x^3} + x^2 & x^2 + x + 1 \\ \hline
\cancel{x^2} - 1 & \\
-\cancel{x^2} + x & \\ \hline
x - \cancel{1} & \\
-\cancel{x} + 1 & \\ \hline
0 &
\end{array}
\quad \Rightarrow \quad \boxed{x^3 - 1 = (x^2 + x + 1) \cdot (x - 1)}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
2x^2 - x - 1 & x - 1 \\ \hline
-2x^2 + 2x & 2x + 1 \\ \hline
x - 1 & \\
-x + 1 & \\ \hline
0 &
\end{array}
$$

$$\Rightarrow 2x^2 - x - 1 = (x-1).(2x+1)$$

Com isso, temos:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{2x^2 - x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x^2+x+1).\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}.(2x+1)} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2+x+1}{2x+1} =$$

$$= \frac{(1)^2 + 1 + 1}{2(1) + 1} = \frac{3}{3} = 1$$

obs: DA LISTA 03, FAZER até o nº 9, item (t).

---

03) $\lim_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x+3} - 2}{x^2 - x} = \dfrac{0}{0}$ (INDETERM.)

COMO ESTE LIMITE ENVOLVE UM RADICAL, PRECISAMOS EFETUAR UMA RACIONALIZAÇÃO.
[POIS ASSIM VAI APARECER, POR EX: $(\sqrt{a} - b).(\sqrt{a} + b)$
$a - b^2$]

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x^2 - x} = \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x^2 - x} \cdot \frac{\sqrt{x+3} + 2}{\sqrt{x+3} + 2} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(\cancel{\sqrt{x+3}})^{\cancel{2}} - (2)^2}{(x^2 - x)(\sqrt{x+3} + 2)} = \lim_{x \to 1} \frac{x + 3 - 4}{x(x-1)(\sqrt{x+3} + 2)} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{x-1}}{x\,\cancel{(x-1)}\,.\,(\sqrt{x+3}+2)} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{x\,(\sqrt{x+3}+2)}$$

$$= \frac{1}{1\,.\,(\sqrt{1+3}+2)} = \frac{1}{4} \,//$$

$$04)\quad \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x^2-x}-\sqrt{3x-4}}{2x^2-4x} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x^2-x}-\sqrt{3x-4}}{2x^2-4x} \times \frac{\sqrt{x^2-x}+\sqrt{3x-4}}{\sqrt{x^2-x}+\sqrt{3x-4}} =$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{(\sqrt{x^2-x})^{\cancel{2}} - (\sqrt{3x-4})^{\cancel{2}}}{2x(x-2)\,.\,(\sqrt{x^2-x}+\sqrt{3x-4})}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{x^2-x-(3x-4)}{2x(x-2)\,.\,(\sqrt{x^2-x}+\sqrt{3x-4})} =$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{x^2-4x+4}{2x(x-2)(\sqrt{x^2-x}+\sqrt{3x-4})}$$

$$\begin{array}{l|l}
\cancel{x^2}-4x+4 & x-2 \\ \hline
-\cancel{x^2}+2x & x-2 \\ \hline
\quad -2x+\cancel{4} & \\
\quad +2x-\cancel{4} & \\ \hline
\quad\quad 0 &
\end{array}$$

$$x^2-4x+4 = (x-2)^2$$

E3 $$\lim_{x\to 2} \frac{(x-2)^{\cancel{2}}}{2x\cancel{(x-2)}\left(\sqrt{x^2-x}+\sqrt{3x-4}\right)} = \frac{0}{2\cdot(2)\cdot(\sqrt{2}+\sqrt{2})}$$

$$= 0 \,//$$

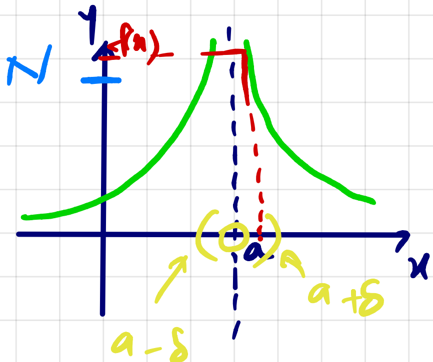
LIMITES INFINITOS & LIMITES NO INFINITO:

Def: • $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$

$\Updownarrow$ def.

$\forall N>0,\ \exists \delta>0$ tal que:

$\forall x:\ 0<|x-a|<\delta \Rightarrow f(x)>N.$

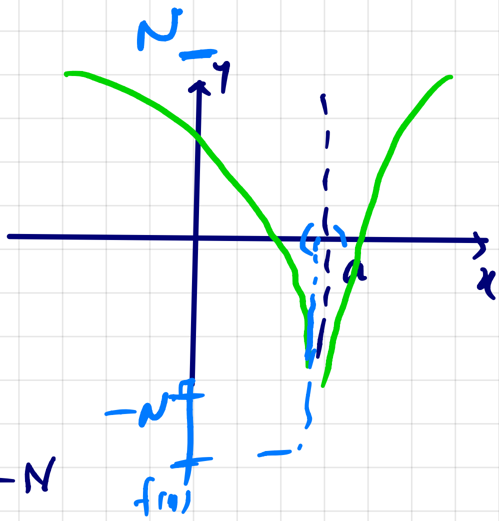


• $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$

$\Updownarrow$ def

$\forall N>0,\ \exists \delta>0$ tal que

$\forall x:\ 0<|x-a|<\delta \Rightarrow f(x)<-N$

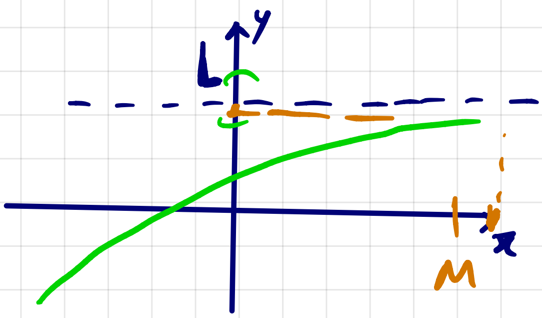


• $\lim_{x\to +\infty} f(x) = L$

$\Updownarrow$ def.

$\forall \varepsilon>0,\ \exists M>0$ tal que:

$\forall x>M \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon.$

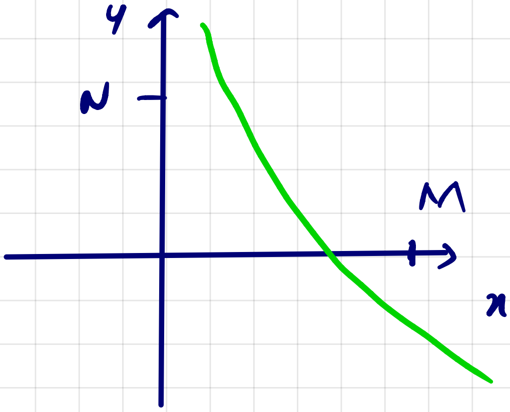


- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$:

$\Updownarrow$ def.

$\forall N > 0, \ \exists M > 0$ tal que:

$\forall x > M \Rightarrow f(x) < -N$



Analogamente definem-se demais casos.

INDETERMINAÇÃO DA FORMA $\frac{\infty}{\infty}$:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2} = ? \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x} = ? \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^2} = ?$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}} = \lim_{x \to +\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} = \lim_{x \to +\infty} 1 = 1$$

Quando tivermos $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$, basta observar os termos de grau mais alto.

Ex.:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 - 3x^2 + 60x}{2x^4 - x + 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^{\cancel{3}}\left(1 - \frac{3}{x} + \frac{60}{x^2}\right)}{2x^{4}\left(1 - \frac{1}{2x^3} + \frac{1}{2x^4}\right)}$$

$\frac{3}{x} \to 0$, $\frac{60}{x^2} \to 0$, $\frac{1}{2x^3} \to 0$, $\frac{1}{2x^4} \to 0$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x^5}}{2x^{\cancel{6}}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2x} = 0$$

Em resumo, basta analisar o grau mais alto do numerador e do denominador:

Ex: $$\lim_{x \to -\infty} \frac{3x^4 - 5x^5 + 6x - 1}{x^3 - 3x^2 + 2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-5x^{\cancel{5}}}{x^{\cancel{3}}} =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{-5x^2}{1} = -5 \cdot (-\infty)^2 = -5 \cdot (+\infty) = -\infty$$

Outros símbolos de indeterminação:

$$\frac{\infty}{\infty} \; ; \quad \infty - \infty \; ; \quad 0 \cdot \infty$$