CÁLCULO 1, T_2.

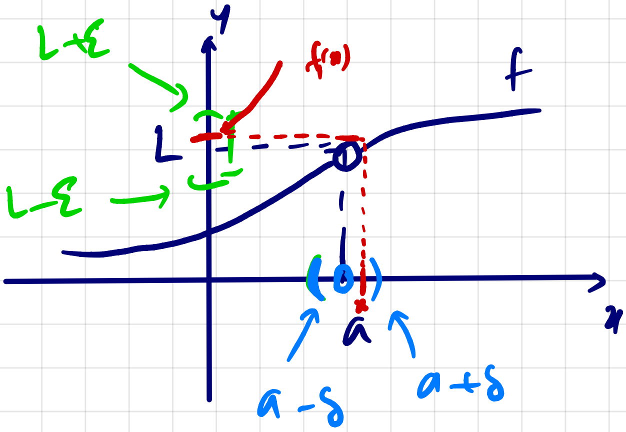
09/07/24 — AULA 15

Na aula anterior iniciamos o estudo de limites de funções de uma variável real.

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \overset{\text{def.}}{\iff} \forall \varepsilon>0,\ \exists \delta>0 \text{ tal que, } \forall x\in D(f):$$
$$0<|x-a|<\delta \implies |f(x)-L|<\varepsilon.$$

$a\in\mathbb{R}$ é um ponto de acumulação do conj. $D(f)$.

ou seja, lembrando: $a\in\mathbb{R}$ é ponto de acumulação de um conj. $X\subset\mathbb{R} \overset{\text{def.}}{\iff} \forall \delta>0$, o conj. $(a-\delta, a+\delta)\setminus\{a\}$ possui interseção não vazia com o conj. X.



Seguindo nos exemplos, vejamos mais um:

06) $f:\mathbb{R}\setminus\{2\}\to\mathbb{R}$; $\quad f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$.

Mostrar que $\lim_{x\to 2} f(x) = 4$.

Dado $\varepsilon>0$, precisamos encontrar $\delta>0$, tal que, $\forall x\in D(f)$, tal que $0<|x-2|<\delta$, implique em $|f(x)-4|<\varepsilon$.

Analisando $|f(x)-4|$:

$$|f(x) - 4| = \left|\frac{x^2-4}{x-2} - 4\right| = \left|\frac{(x+2)\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}} - 4\right| =$$

$$= |x+2-4| = \underbrace{|x-2|}_{<\delta} < \delta = \varepsilon$$

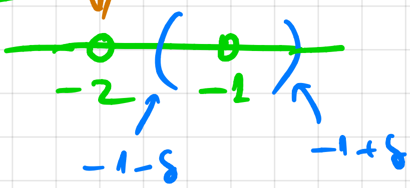
Ou seja, basta tomar $\delta = \varepsilon$. Isso mostra que $\lim_{x \to a} f(x) = 4$.

07) Prove que $\lim_{x \to -1} \frac{x}{x+2} = -1$.

Solução: Dado $\varepsilon > 0$, precisamos encontrar $\delta > 0$, tal que, $\forall x \in D(f): 0 < |x-(-1)| < \delta \Longrightarrow |f(x) - (-1)| < \varepsilon$.

$(|x+1| < \delta)$

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1, -2\}$



CUIDADO: o $\delta > 0$ deve ser tomado de modo que o intervalo construído em torno de -1 não contemple o ponto -2, pois este não está no $D(f)$.

Por isso, o $\delta > 0$ a ser encontrado, deve ser tal que $0 < \delta < 1$.

Avaliando a distância entre $f(x)$ e -1, temos:

$$|f(x) - (-1)| = |f(x)+1| = \left|\frac{x}{x+2} + 1\right| = \left|\frac{x + x+2}{x+2}\right| =$$

$$= \left|\frac{2x+2}{x+2}\right| = \frac{|2(x+1)|}{|x+2|} = \frac{2 \cdot \overbrace{|x+1|}^{<\delta}}{|x+2|} < \frac{2\delta}{|x+2|}$$

$$\Rightarrow \boxed{|f(x)+1| < \frac{2\delta}{|x+2|}} \quad (*)$$

Note que $|x+2|$ está no denominador. Como δ só pode depender do $\varepsilon>0$, então o "x" deve desaparecer. Como $|x+2|$ está no denominador, devemos substituí-lo por "algo" maior do que ele, pois assim, tomando o inverso ficará menor, que é a estimativa desejada. Assim.

$$|x+2| = |x+1+1| = |1+(x+1)| \geq |1| \overbrace{-|x+1|}^{>-\delta} > 1-\delta > 0$$

$|x+1|<\delta$

$-|x+1|>-\delta$

$|a\pm b| \geq |a|-|b|$

para $\delta<1$

Ou seja, estimamos:

$$|x+2| > 1-\delta > 0 .$$ Então;

$$\frac{1}{|x+2|} < \frac{1}{1-\delta} .$$ Assim, (*) fica:

$$|f(x)+1| < \frac{2\delta}{|x+2|} = 2\delta \cdot \frac{1}{|x+2|} < 2\delta \cdot \frac{1}{1-\delta} = \frac{2\delta}{1-\delta} := \varepsilon$$

$$< \frac{1}{1-\delta}$$

Ou seja, obtemos a relação:

$$\frac{2\delta}{1-\delta} = \varepsilon \implies 2\delta = \varepsilon\cdot(1-\delta)$$

$$2\delta = \varepsilon - \varepsilon\cdot\delta$$

$$2\delta + \varepsilon\cdot\delta = \varepsilon$$

$$\delta(2+\varepsilon) = \varepsilon \implies \boxed{\delta = \frac{\varepsilon}{2+\varepsilon}}$$

Isto mostra o limite desejado.

PROPRIEDADES DOS LIMITES:

PROPOSIÇÃO: O limite de uma função, se existir, é único.

(UNICIDADE DO LIMITE)

DEMONSTR.: Sejam $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim\limits_{x\to a} f(x) = M$.

Vamos mostrar que $L = M$.

Por absurdo, suponha que $L \neq M$.

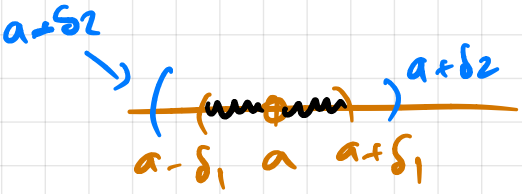
Tome $\varepsilon = |L - M| > 0$

Como $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$, então, $\exists\, \delta_1 > 0$ tal que,

$$\forall x \in D(f): \quad 0 < |x-a| < \delta_1 \implies |f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (*)$$

Como $\lim\limits_{x\to a} f(x) = M$, então $\exists\, \delta_2 > 0$ tal que,

$$\forall x \in D(f): \quad 0 < |x-a| < \delta_2 \implies |f(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (**)$$



Tome $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$

Assim, $\forall x \in D(f)$ tal que $0 < |x-a| < \delta$, valem $(*)$ e $(**)$.

Disso, temos:

$$\varepsilon = |L - M| = |(L - f(x)) + (f(x) - M)| \underbrace{\leq}_{\text{DESIGUALDADE TRIANGULAR.}} \overbrace{|f(x) - L|}^{< \frac{\varepsilon}{2},\ \text{por } (*)} + \underbrace{|f(x) - M|}_{< \frac{\varepsilon}{2},\ \text{por } (**)} <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ou seja, acabamos de mostrar que $\varepsilon < \varepsilon$, um absurdo!

Portanto $L = M$, ou seja, existindo o limite, ele é único!

$\square$

PROPOSIÇÃO (PROPRIEDADES ARITMÉTICAS DOS LIMITES)

Sejam $f, g : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $a \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação do conjunto A. Se $\lim_{x \to a} f(x) = L$ e $\lim_{x \to a} g(x) = M$, então:

(i) $\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = L + M.$

[i.e., $\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$]

(ii) $\lim_{x \to a} (f(x) - g(x)) = L - M$

(iii) $\lim_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = L \cdot M.$

(iv) $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$, desde que $M \neq 0$.

(v) $\lim_{x \to a} [f(x)]^{g(x)} = L^M.$

DEMONSTR.: Provaremos apenas a (i).

Ou seja, vamos mostrar que $\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = L + M.$

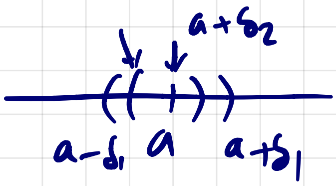
Dado $\varepsilon > 0$.

Como $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, então, $\exists\, \delta_1 > 0$, tal que,

$\forall x \in A$, tal que $0 < |x-a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ $(*)$

Como $\lim\limits_{x \to a} g(x) = M$, então, $\exists\, \delta_2 > 0$, tal que,

$\forall x \in A$, tal que $0 < |x-a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - M| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. $(**)$



Tome $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$

Então, $\forall x \in A$ tal que $0 < |x-a| < \delta$, valem $(*)$ e $(**)$

Assim:

$$|(f+g)(x) - (L+M)| = |f(x) + g(x) - L - M| =$$

$$= |(f(x) - L) + (g(x) - M)| \leq \underbrace{|f(x) - L|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|g(x) - M|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Ou seja, mostramos que $|(f+g)(x) - (L+M)| < \varepsilon$, sempre que $0 < |x-a| < \delta$; ou seja, mostramos que

$$\lim_{x \to a} (f+g)(x) = L + M$$

$$\parallel$$

$$\lim_{x \to a} (f(x) + g(x))$$

$\square$

PROPOSIÇÃO: Valem os limites:

(i) $\lim\limits_{x\to a} k = k$; [ou seja, o limite de uma constante é a própria constante]

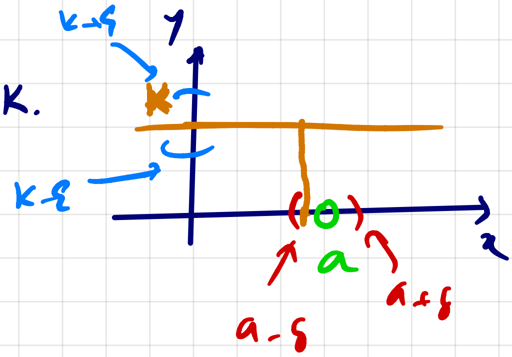
(ii) $\lim\limits_{x\to a} x = a$;

(iii) $\lim\limits_{x\to a} x^n = a^n$;

(iv) $\lim\limits_{x\to a} p(x) = p(a)$, onde $p(x)$ é um polinômio

DEMONSTR.:

(i) $\lim\limits_{x\to a} k = k$. $\quad f(x) = k$.



Dado $\varepsilon > 0$. Precisamos achar $\delta > 0$, tal que, $\forall x \in \mathbb{R}$, tal que $0 < |x-a| < \delta$, implique em $|f(x) - k| < \varepsilon$.

Note que,

$$|f(x) - k| = |k - k| = 0 < \varepsilon, \ \forall \varepsilon > 0.$$

Portanto, qualquer $\delta > 0$ serve. Tome, por exemplo, $\delta = \varepsilon$.

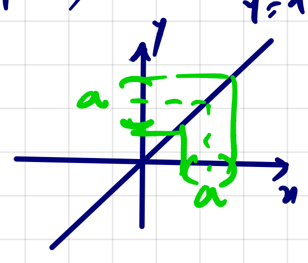
$\square$

Ex: $\lim\limits_{x\to -4} 3 = 3$

(ii) $\lim\limits_{x\to a} x = a$.

Dado $\varepsilon > 0$, precisamos encontrar $\delta > 0$, tal que;

$\forall x \in \mathbb{R}$: $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$.



Analisando $|f(x) - a|$, temos:

$$|f(x) - a| = |x - a| < \delta = \varepsilon.$$

Ou seja, basta tomar $\delta = \varepsilon$. $\square$.

Ex: $\lim_{x \to -8} x = -8$

(iii) $\lim_{x \to a} x^n = a^n$.

Basta lembrar que: [e usando isso podemos "escapar" da def.]

$$\lim_{x \to a} [f(x)]^{g(x)} = L^M, \text{ e então como}$$

$\lim_{x \to a} x = a$ e $\lim_{x \to a} n = n$, segue que

$$\lim_{x \to a} x^n = a^n$$

(iv) Basta usar as propriedades anteriores:

$$\lim_{x \to a} P(x) = \lim_{x \to a} \left(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_n x^n\right) =$$

$$= \lim_{x \to a} b_0 + \lim_{x \to a} b_1 x + \lim_{x \to a} b_2 x^2 + \dots + \lim_{x \to a} b_n x^n$$

$$= b_0 + b_1 a + b_2 a^2 + \dots + b_n a^n = P(a).$$

$\square$