Capítulo II

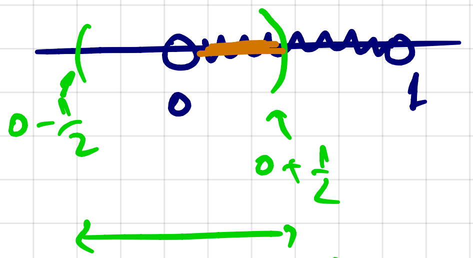
LIMITES DE FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL REAL:

Def.: Dado $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. Diremos que $a \in \mathbb{R}$ é um PONTO DE ACUMULAÇÃO do conjunto A se $\forall \delta > 0$ tem-se que $((a-\delta, a+\delta) \cap A) \setminus \{a\} \neq \emptyset$.

Em palavras: $a \in \mathbb{R}$ é um ponto de acumulação se, todo intervalo centrado em a, exceto o próprio ponto a, tiver pontos em comum com o conjunto A.

Ex.: $A = (0,1) \subset \mathbb{R}$.

Note que $0 \notin A$, mas 0 é ponto de acumulação de A, pois podemos tomar $\delta = \frac{1}{2} > 0$, e é tal que



$(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \setminus \{0\}$ tem interseção $\neq \emptyset$ com o conj. A.

O conjunto de todos os pontos de acumulação de um conj. A chama-se DERIVADO de um conj., e denotamos por A'.

Frente ao exposto acima, podemos definir o conceito de limite de função:

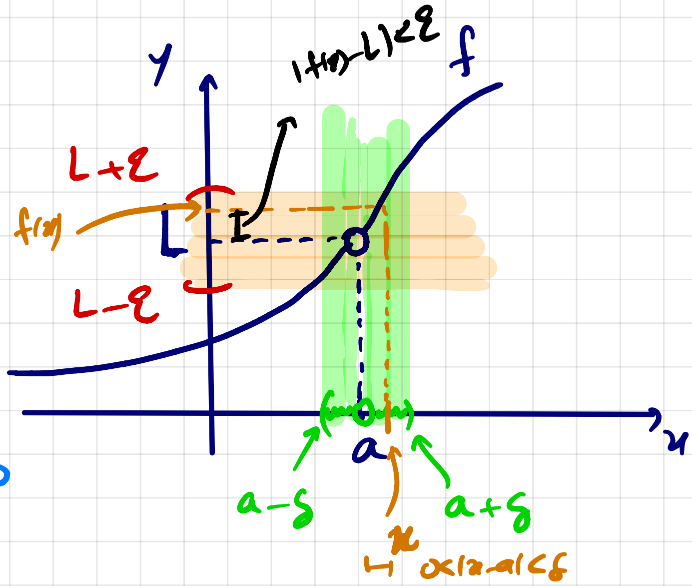
<u>Def.</u>: Seja $f: A \to \mathbb{R}$ uma função, com $a \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação do conj. A. Dizemos que $L \in \mathbb{R}$ é o limite de $f(x)$ quando x tende para a, e escrevemos

$$L = \lim_{x \to a} f(x),$$

se e somente se:

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0 \text{ tal que, } \forall x \in A: \ 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

<u>NA PRÁTICA</u>: ESCOLHE UMA APROXIMAÇÃO $\varepsilon > 0$ (PEQUENA). MONTA-SE O INTERVALO $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ COM ESTE $\varepsilon > 0$, VAI EXISTIR $\delta > 0$ (δ DEPENDE DO $\varepsilon > 0$ ESCOLHIDO), TAL QUE, CONSTRUINDO UM INTERVALO CENTRADO EM a, DE RAIO $\delta > 0$, EXCETO O PONTO a, ENTÃO, É GARANTIDO QUE, QUALQUER x TOMADO EM $(a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$ TEM-SE $f(x) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$.



De fato, note que:

$$0 < |x-a| < \delta \iff |x-a| < \delta \text{ e } x \neq a$$

$$\iff -\delta < \underset{+a}{x-a} < \delta \text{ e } x \neq a$$

$$\iff a-\delta < x < a+\delta \text{ e } x \neq a.$$

e $\quad |f(x) - L| < \varepsilon \iff -\varepsilon < f(x) - L < \varepsilon$

$+L$

$$L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$$

Vejamos alguns exemplos de aplicação da def. de limite:

01) Prove que $\lim_{x \to 1} 2x+3 = 5 \qquad f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$

<u>SOLUÇÃO:</u> Dado $\varepsilon > 0$, precisamos encontrar $\delta > 0$, tal que, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ tal que

$0 < \underbrace{|x - 1| < \delta}$, implique em $|f(x) - 5| < \varepsilon$.

Avaliando $|f(x) - 5|$:

$$|f(x) - 5| = |2x + 3 - 5| = |2x - 2| = |2(x-1)| =$$

$$= 2 \cdot \underbrace{|x-1|}_{<\delta} < 2 \cdot \delta := \varepsilon$$

Ou seja, basta tomar $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Portanto, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ (a saber: $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$),

e é tal que $|f(x) - 5| < \varepsilon$, sempre que $0 < |x - 1| < \delta$.

Ou seja, mostramos que

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 5.$$

$\square$

<u>EXEMPLIFICANDO / ILUSTRANDO O EXEMPLO:</u> TOME $\varepsilon = 0{,}1$.

ENTÃO, TEM-SE $\delta = \dfrac{0{,}1}{2} = 0{,}05$. ASSIM, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

TAL QUE $0 < |x - 1| < 0{,}05$, É <u>GARANTIDO</u> QUE

$|f(x) - 5| < 0{,}1$.

$\hookrightarrow$ POR EXEMPLO: $x = 1{,}001$. ENTÃO:

$$0 < |x-1| = |1{,}001 - 1| = 0{,}001 < 0{,}05 = \delta$$

Assim; temos

$$|f(x) - 5| = |f(1{,}001) - 5| = |2.(1{,}001) + 3 - 5|$$

$$= |2{,}002 - 2| = 0{,}002 < 0{,}1 = \varepsilon.$$

02) Mostre que $\lim\limits_{x \to 3} \sqrt{x+1} = 2$. $\quad f: (-1,3) \cup (3, +\infty) \to \mathbb{R}$

Solução: Dado $\varepsilon > 0$, precisamos achar $\delta > 0$, tal que, $\forall x \in D(f)$ tal que $0 < |x-3| < \delta \Longrightarrow |f(x) - 2| < \varepsilon$.

$(a-b).(a+b) = a^2 - b^2$

Avaliando $|f(x) - 2|$:

$$|f(x) - 2| = |\sqrt{x+1} - 2| = \left| (\sqrt{x+1} - 2) \times \frac{(\sqrt{x+1} + 2)}{(\sqrt{x+1} + 2)} \right| =$$

$$= \left| \frac{(\sqrt{x+1})^2 - (2)^2}{\sqrt{x+1} + 2} \right| = \frac{|x+1-4|}{|\sqrt{x+1} + 2|} = \frac{\overbrace{|x-3|}^{<\delta}}{|\sqrt{x+1} + 2|} <$$

$$< \frac{\delta}{|\sqrt{x+1} + 2|}$$

Note que $|\sqrt{x+1} + 2| \geq \underbrace{\sqrt{x+1}}_{\geq 0} + 2 \geq 2$

$$\Rightarrow \frac{1}{|\sqrt{x+1} + 2|} \leq \frac{1}{2}.$$

Assim, nossa estimativa fica:

$$|f(x)-2| < \frac{\delta}{|\sqrt{x+1}+2|} = \delta \cdot \underbrace{\frac{1}{|\sqrt{x+1}+2|}}_{\leq \frac{1}{2}} \leq \delta \cdot \frac{1}{2} = \frac{\delta}{2} := \varepsilon$$

Ou seja, basta tomar $\delta = 2\varepsilon$.

Portanto, dado $\varepsilon > 0$, encontramos $\delta > 0$ (a saber: $\delta = 2\varepsilon$) que é tal que $|f(x)-2| < \varepsilon$, sempre que $0 < |x-3| < \delta$.

Ou seja; $\displaystyle\lim_{x \to 3} f(x) = 2$. $\square$

ILUSTRANDO ESTE EXEMPLO: Tome $\varepsilon = 0{,}1 > 0$.

Então, $\delta = 2 \cdot \varepsilon \Rightarrow \delta = 0{,}2$

Assim, qualquer x tal que $0 < |x-3| < 0{,}2$,

é GARANTIDO que $|f(x)-2| < 0{,}1$.

Por exemplo: $x = 2{,}93$, é tal que

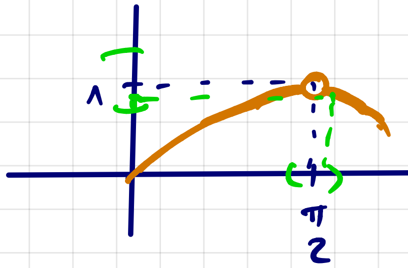
$$0 < |2{,}93 - 3| = 0{,}07 < 0{,}2 = \delta$$

Então:

$$|f(x)-2| = |f(2{,}93)-2| = |\sqrt{2{,}93+1} - 2|$$

$$= |\sqrt{3{,}93} - 2| \cong 0{,}018 < 0{,}1 = \varepsilon.$$

03) Mostrar que $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x = 1$. ; $f: \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2}\} \to \mathbb{R}$.

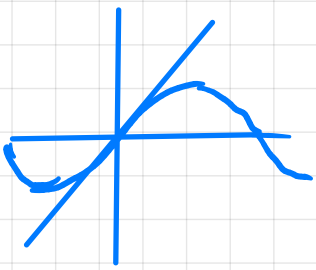


Dado $\varepsilon > 0$, precisamos achar $\delta > 0$, tal que, $\forall x \in D(f)$, tal que $0 < |x - \frac{\pi}{2}| < \delta$, implique em $|\operatorname{sen} x - 1| < \varepsilon$.

Analisando $|\operatorname{sen} x - 1|$:

$$|\operatorname{sen} x - 1| = \left|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen}\tfrac{\pi}{2}\right| \overset{(*)}{=} \left| 2 \cdot \operatorname{sen} \frac{x - \frac{\pi}{2}}{2} \cdot \cos \frac{x + \frac{\pi}{2}}{2} \right|$$

$$= 2 \cdot \left|\operatorname{sen}\left(\frac{x - \frac{\pi}{2}}{2}\right)\right| \cdot \underbrace{\left|\cos\left(\frac{x + \frac{\pi}{2}}{2}\right)\right|}_{\leq 1} \leq 2 \cdot \left|\operatorname{sen}\left(\frac{x - \frac{\pi}{2}}{2}\right)\right|$$



NOTE QUE VALE $|\operatorname{sen} \alpha| \leq |\alpha|$, $\forall \alpha$. (radianos)
(VEJA EXPLICAÇÃO MAIS ABAIXO.)

$$\leq \cancel{2} \cdot \left| \frac{x - \frac{\pi}{2}}{\cancel{2}} \right| = \left|x - \frac{\pi}{2}\right| < \delta := \varepsilon.$$

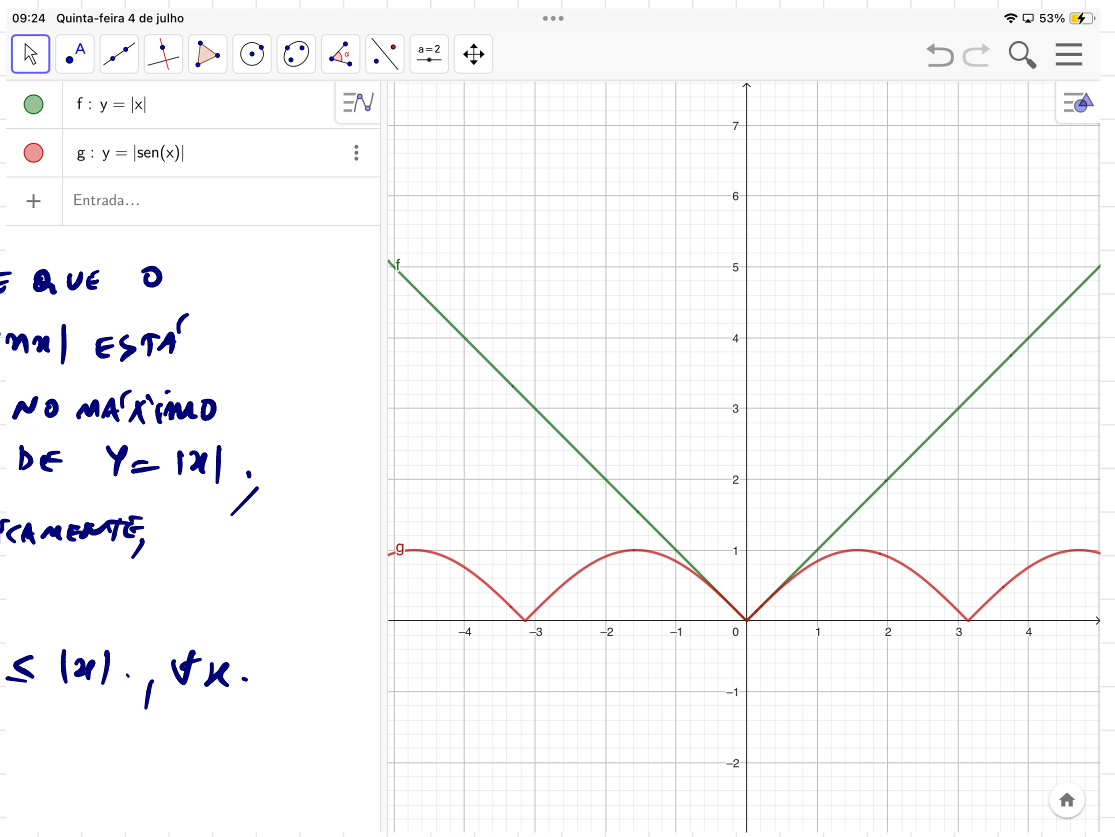
Ou seja, basta tomar $\delta = \varepsilon$.

∎

(*) lembrando:

$$\operatorname{sen} p - \operatorname{sen} q = 2 \cdot \operatorname{sen} \frac{p-q}{2} \cdot \cos \frac{p+q}{2}.$$

(veja na aula 12)



PELO GEOGEBRA, NOTE QUE O GRÁFICO DE $Y = |\operatorname{sen} x|$ ESTÁ SEMPRE ABAIXO, E NO MÁXIMO IGUAL AO GRÁFICO DE $Y = |x|$. O QUE, GEOMETRICAMENTE, JUSTIFICA QUE

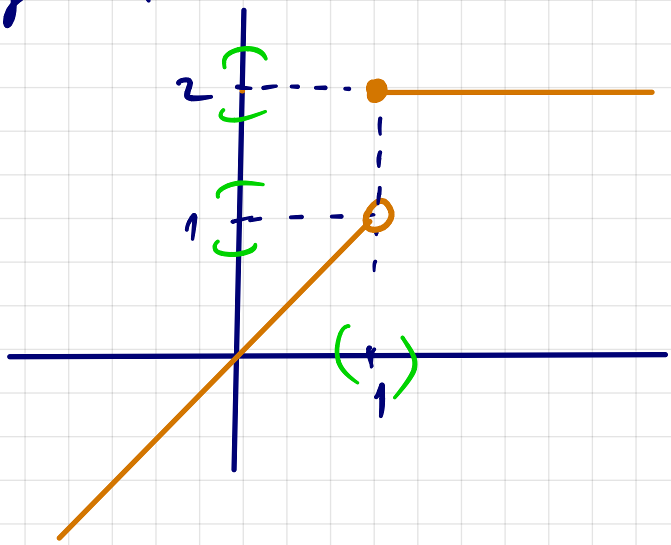
$$|\operatorname{sen} x| \leq |x|, \ \forall x.$$

04) Mostre, geometricamente, que $\nexists \lim_{x \to 1} f(x)$, onde

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x < 1 \\ 2, & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

Solução:

De fato, geometricamente tem-se:



$\exists\, \varepsilon_0 > 0$ tal que, $\forall \delta$ tal que $0 < |x-1| < \delta$, mas $|f(x) - 2| \geq \varepsilon_0$ ou $|f(x) - 1| \geq \varepsilon_0$.

logo, $\nexists \lim_{x \to 1} f(x)$. (pois seria 1? seria 2? outro valor?)

---

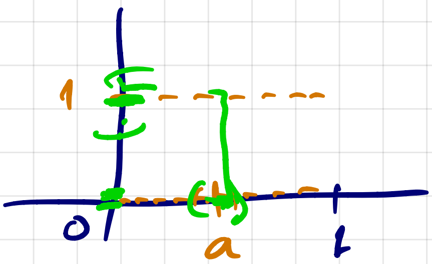
05) A FUNÇÃO DE DIRICHLET:

$$f : [0,1] \to \mathbb{R},$$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

é tal que $\nexists \lim_{x \to a} f(x)$, $\forall a \in [0,1]$.

Isto devido à densidade de $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$ em $\mathbb{R}$.



seja: $L = 0$ ou $L = 1$:

Tome $\varepsilon = 0,1$

- se $a \in \mathbb{Q}$. qualquer $x \in \mathbb{I}$ tal que
  $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| = 1 > \varepsilon$

- se $a \in \mathbb{Q}$. qualquer $x \in \mathbb{Q}$ tal que
  $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| = 1 > \varepsilon$