CÁLCULO I, T_1

02/07/24 — AULA 13

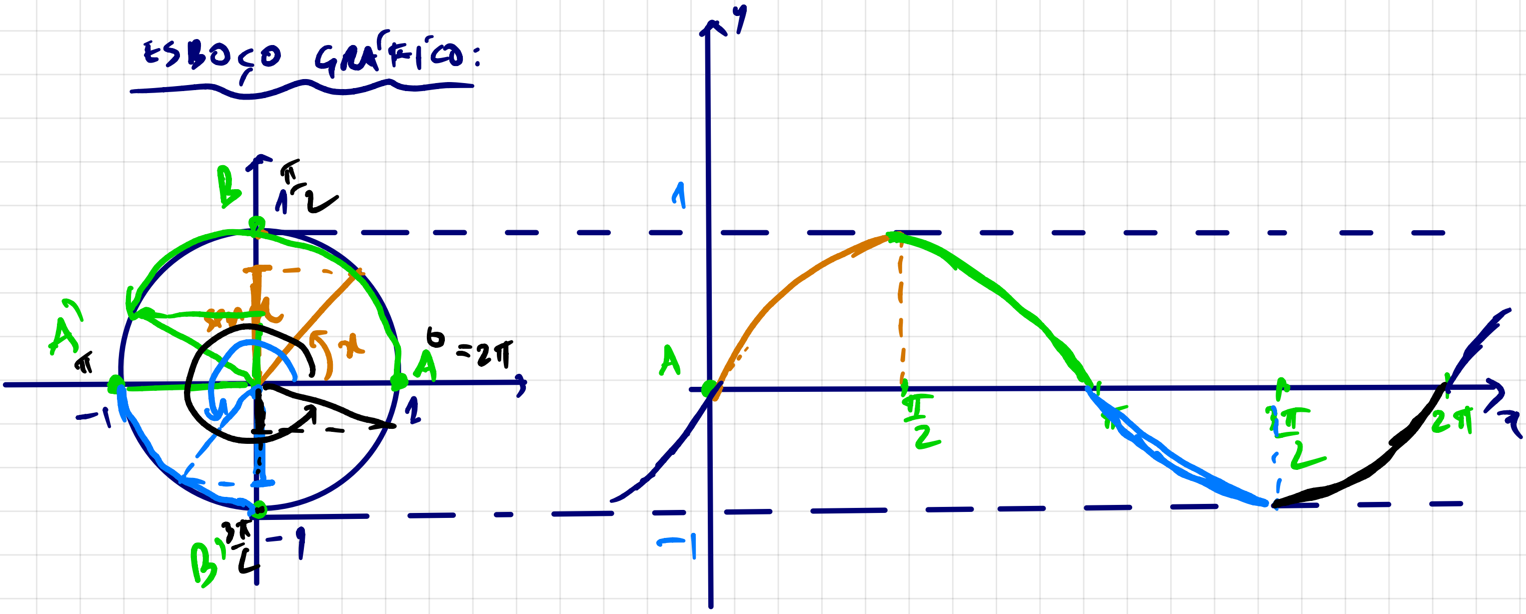
OBS.: AULÃO CÁLCULO 1 (GAMA) 06/07 9h → 11h CAMPUS II BARROSO.

FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS DIRETAS:

Def.: Definimos a função seno por $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \operatorname{sen} x$$

ESBOÇO GRÁFICO:



PERÍODO DO SENO: 2π.

Note que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1$. $\Longleftrightarrow$ $|\operatorname{sen} x| \leq 1$.

$Im(f) = [-1, 1]$

EXEMPLOS:

01) $f(x) = 1 + \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.

$D(f) = ?$ $\longrightarrow$ $D(f) = \mathbb{R}$

$Im(f) = ?$

Gráfico?

Pois não há restrição para a variável x.

Como $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ $-1 \leq \operatorname{sen} \alpha \leq 1$, então

$$-1 \leq \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \leq 1. \quad +1.$$

$$\underbrace{1-1}_{0} \leq \underbrace{1 + \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}_{f(x)} \leq \underbrace{1+1}_{2}$$

$$\Downarrow$$

$$0 \le f(x) \le 2 \quad \Rightarrow \quad Im(f) = [0, 2].$$

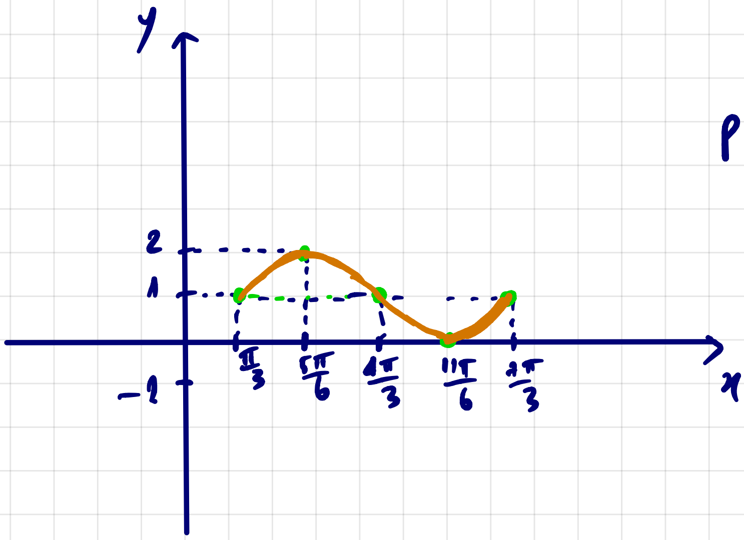
Esboço gráfico: Note que, neste caso, temos um arco composto: $x - \frac{\pi}{3}$.

Denote-o por $t = x - \frac{\pi}{3}$

$$\Rightarrow \quad x = t + \frac{\pi}{3}.$$

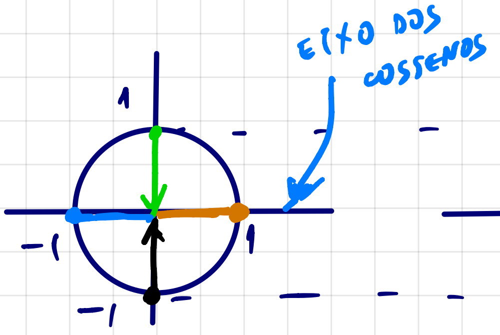
t	$y = 1 + \operatorname{sen} t$	$x = t + \frac{\pi}{3}$
0	$1 + \operatorname{sen} 0 = 1$	$0 + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{6}$
$\frac{\pi}{2}$	$1 + \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 1 + 1 = 2$	$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$
π	$1 + \operatorname{sen} \pi = 1 + 0 = 1$	$\frac{8\pi}{6} = \frac{4\pi}{3}$
$\frac{3\pi}{2}$	$1 + \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} = 1 - 1 = 0$	$\frac{11\pi}{6}$
2π	$1 + \operatorname{sen} 2\pi = 1 + 0 = 1$	$\frac{14\pi}{6} = \frac{7\pi}{3}$

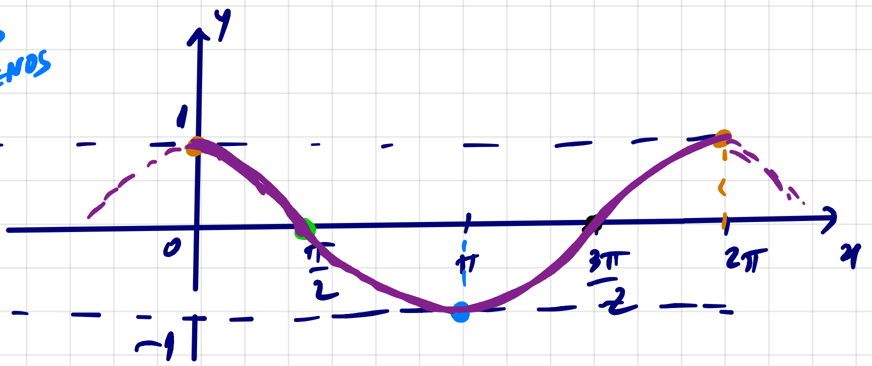
$$\left[\ \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{9\pi + 2\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}\right.$$



$$P = \frac{7\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = \frac{6\pi}{3} = 2\pi.$$

Def.: Definimos a função cosseno de forma análoga à feita para a função seno. Ou seja, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$.





Ex.: $f(x) = 2 - \cos(\underbrace{\frac{\pi}{4} - x}_{t})$.

$D(f) = ?$

$Im(f) = ?$

$p = ?$

Gráfico?

Escreva $t = \frac{\pi}{4} - x$.

$\hookrightarrow x = \frac{\pi}{4} - t \Rightarrow y = 2 - \cos t$

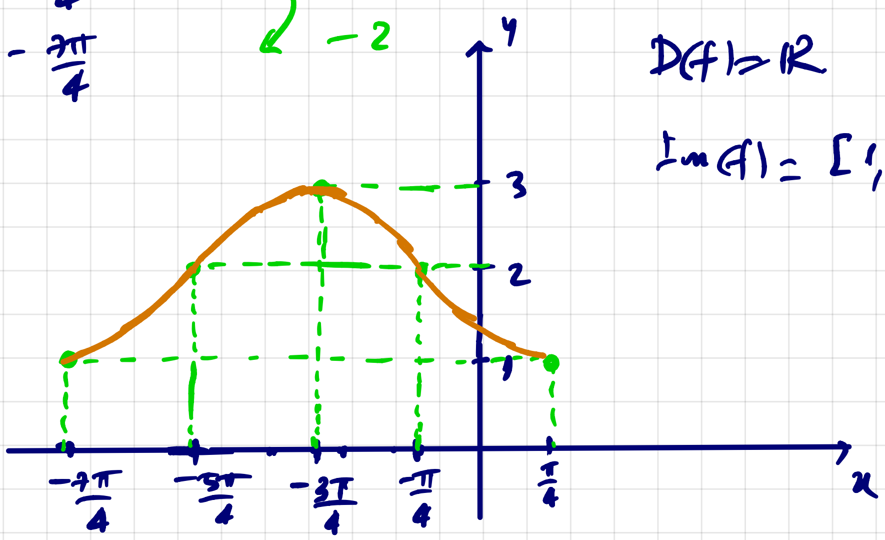
t	$y = 2 - \cos t$	$x = \frac{\pi}{4} - t$
0	$2 - \cos 0 = 2 - 1 = 1$	$\frac{\pi}{4}$
$\frac{\pi}{2}$	$2 - \cos\frac{\pi}{2} = 2 - 0 = 2$	$\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{4}$
π	$2 - \cos\pi = 2 - (-1) = 3$	$\frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3\pi}{4}$
$\frac{3\pi}{2}$	$2 - \cos\frac{3\pi}{2} = 2 - 0 = 2$	$-\frac{5\pi}{4}$
2π	$2 - \cos 2\pi = 2 - 1 = 1$	$-\frac{7\pi}{4}$

-2

-2

-2

-2



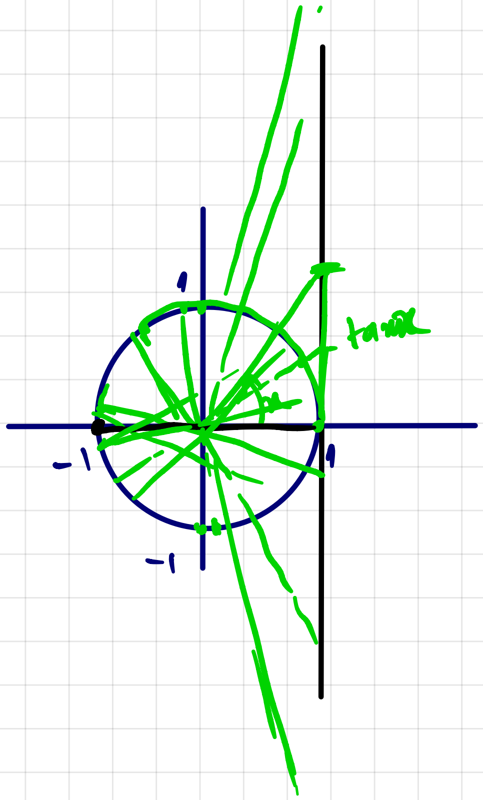
$D(f) = \mathbb{R}$

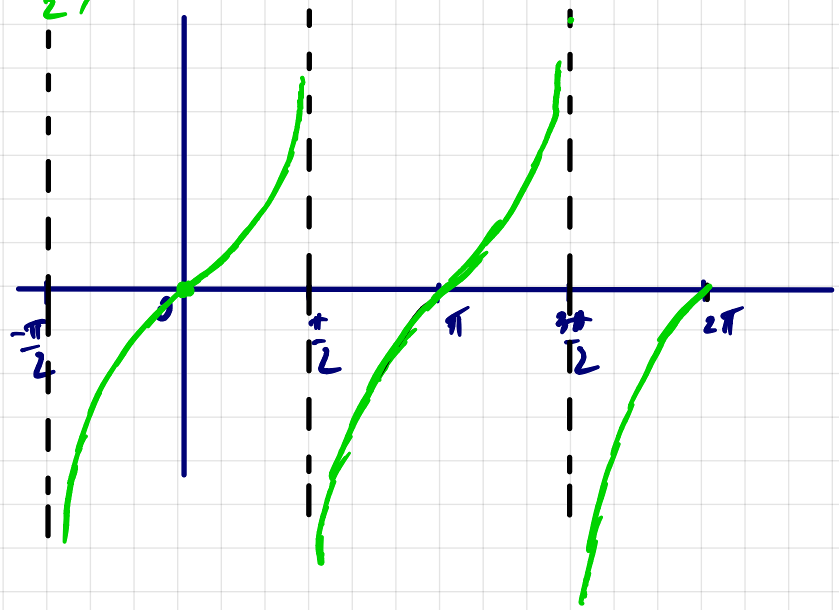
$Im(f) = [1, 3]$

Def: Chama-se função tangente a função

$$f: \mathbb{R} \setminus \underbrace{\{ k\pi + \tfrac{\pi}{2}, \forall k \in \mathbb{Z}\}}_{} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \tan x.$$

POIS ESTES ARCOS DARAM EM $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$, ONDE $\nexists \tan x$.





$\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$. $\qquad P = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$

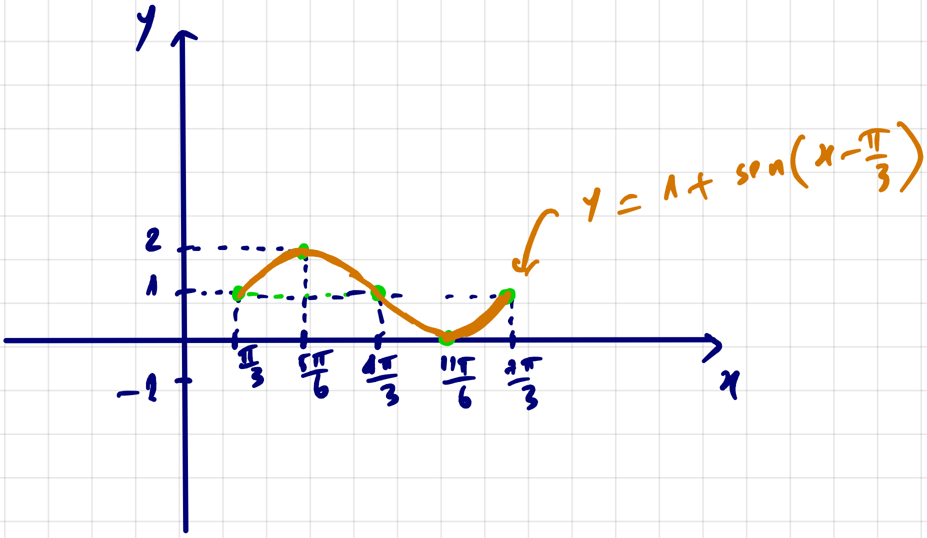
Def: Definimos a função cossecante por

$$f: \mathbb{R} \setminus \underbrace{\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}}_{} \longrightarrow \mathbb{R} \;; \quad f(x) = \csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}.$$

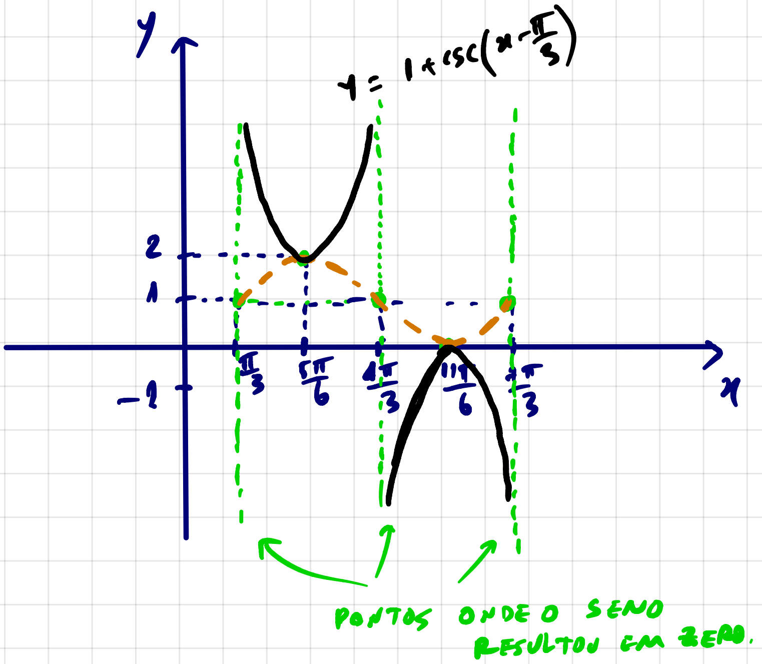
POIS NESTES ARCOS O SENO É ZERO.

Para esboçar o gráfico de uma cossecante, basta fazer o gráfico do seno correspondente e tomar os seus inversos. **EX.:** $y = 1 + \csc\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$. Gráfico?

Solução: Considere, primeiramente, mostrar o gráfico de $y = 1 + \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$, conforme feito no estudo da função seno. Temos para este o gráfico:



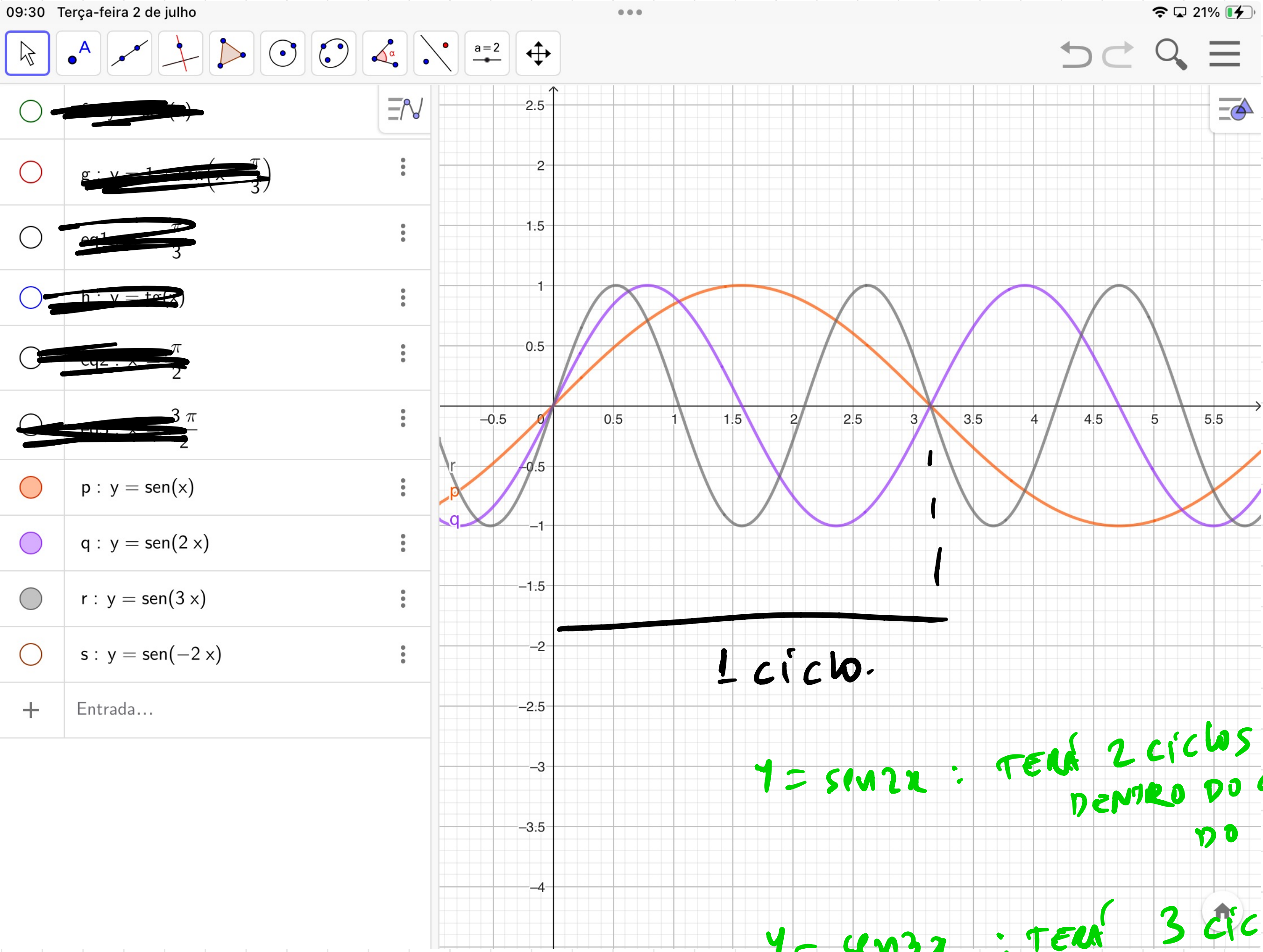
Tomando os inversos deste esboço, teremos:



Analogamente se define a secante e o seu gráfico, tomando o inverso do cosseno.

A função cotangente define-se analogamente ao que fizemos para a tangente.

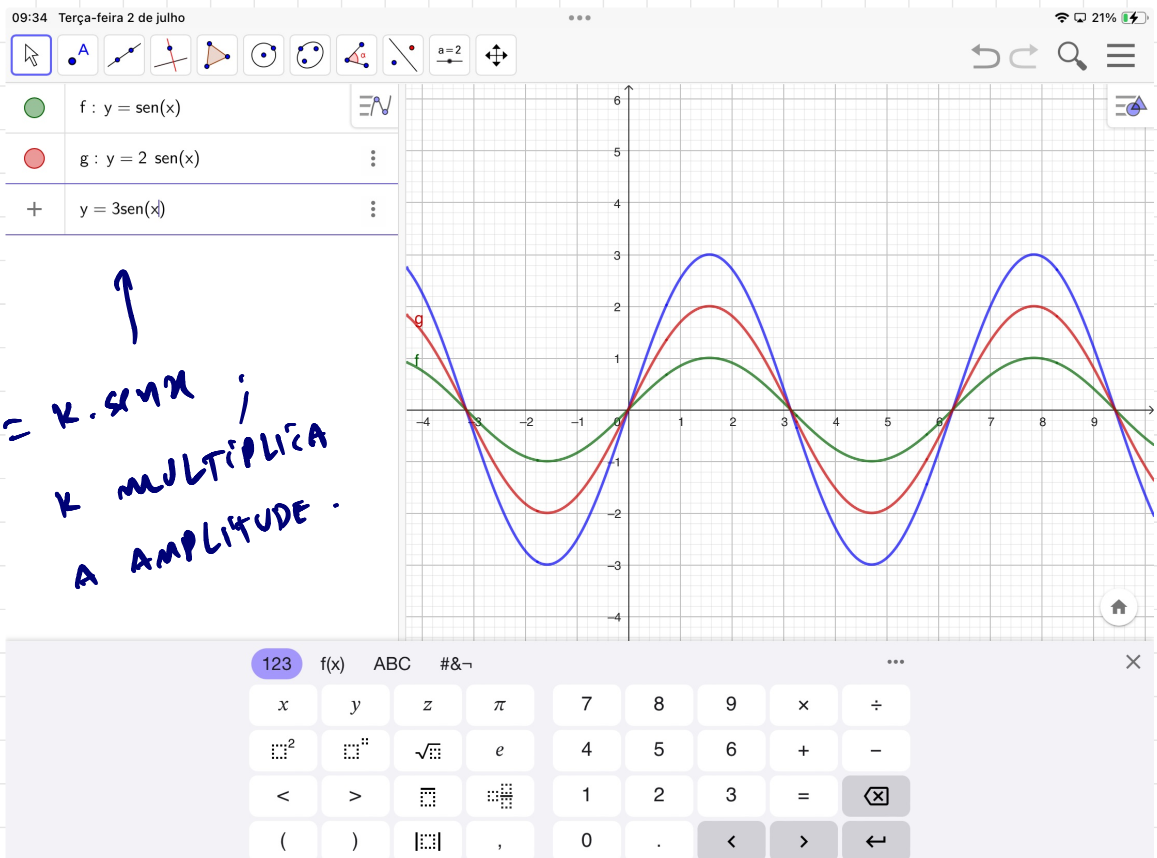
Observações: (pelo geogebra):



$y = sen 2x$: terá 2 ciclos dentro do ciclo do $sen x$.

$y = sen 3x$: terá 3 ciclos dentro do ciclo do $sen x$

etc.



$y = k \cdot sen x$;

k multiplica a amplitude.