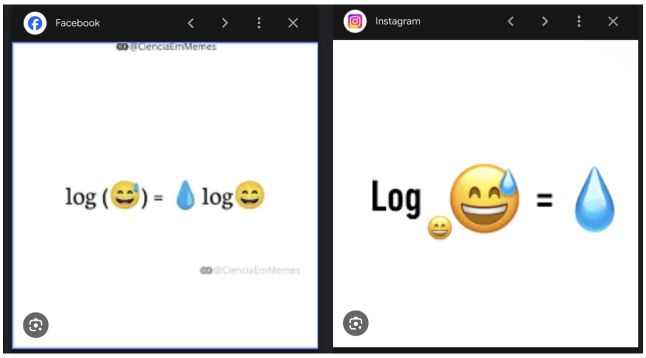
Fundação Universidade Federal de Pelotas
Cursos 3900, 3910, 6100 e 6400
Disciplina de Cálculo 1
Leitura e estudo complementar

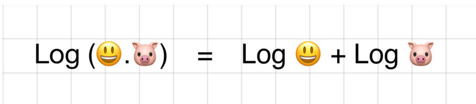
Propriedades emoji-logarítmicas

Prof. Dr. Maurício Zahn

Observe os memes abaixo, onde o primeiro foi extraído do Facebook, do grupo “CiênciaEmMemes”, e o segundo do Instagram, no “Math100”.



No espírito das imagens acima, vamos também apresentar mais uma propriedade “emoji-logarítmica”:



Todas elas usam emojis para, de certa forma, apresentar propriedades dos logaritmos. Traduzindo-as para a linguagem matemática, temos

(i) $\log a^m = m \cdot \log a$;

(ii) $\log_a a^m = m$;

(ii) $\log(a \cdot b) = \log a + \log b$.

No que segue, vamos provar estas propriedades, bem como outras. Antes, porém, convém relembrar o conceito de logaritmo.

Definição 1 Dados $a, b \in \mathbb{R}$, com $a > 0$ e $b > 0$, $b \neq 1$. Definimos o *logaritmo* de a na base b ao expoente $c \in \mathbb{R}$ ao qual se deve elevar a base b de modo a se obter a. Simbolicamente, escrevemos:

$$\log_b a = c \Longleftrightarrow b^c = a.$$

Por exemplo, temos que

- $\log_2 8 = 3$ pois $2^3 = 8$;
- $\log_3 \frac{1}{9} = -2$ pois $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$.

Observe que, na definição de logaritmo deve-se exigir que $a > 0$ e que $b > 0$, com $b \neq 1$, pois, ao transformar para a notação exponencial,

$$\log_b a = c \Longleftrightarrow b^c = a,$$

segue que do fato deque $a = b^c > 0$ e também notamos que uma exponencial b^c só tem sentido se $b > 0$, visto que, por exemplo, se $b = -2 < 0$, então, por exemplo, $b^{\frac{1}{2}} = \sqrt{b} = \sqrt{-2}$, que não tem sentido em reais; e se $b = 1$, sempre teremos $1^c = 1$. Por isso exige-se que $b > 0$ e $b \neq 1$.

Outra observação: quando a base for 10, escrevemos $\log a$ ao invés de $\log_{10} a$, e é chamado de *logaritmo decimal*. Quando a base for o Número de Euler $e \approx 2,71828...$, escrevemos $\log_e a = \ln a$, e é chamado de *logaritmo natural*.

Proposição 1 (Propriedades dos logaritmos) *Sejam $x, y > 0$ e $1 \neq \alpha > 0$. Valem as seguintes propriedades:*

(a) $\log_\alpha 1 = 0$ *(o logaritmo de 1 em qualquer base sempre vale zero);*

(b) $\log_\alpha \alpha = 1$ *(o logaritmo de um número α na base também α vale 1);*

(c) $\log_\alpha \alpha^m = m$;

(d) $\alpha^{\log_\alpha x} = x$;

(e) $\log_\alpha x = \log_\alpha y \Leftrightarrow x = y$;

(f) $\log_\alpha x \cdot y = \log_\alpha x + \log_\alpha y$;

(g) $\log_\alpha \dfrac{x}{y} = \log_\alpha x - \log_\alpha y$;

(h) $\log_\alpha x^m = m \log_\alpha x$.

Obs.: As propriedades (f), (g) e (h) são chamadas de *propriedades operatórias dos logaritmos.*

Demonstração. Faremos apenas as demonstrações de (a) , (c) e (f). As demais ficam como exercício.

(a) Note que, imediatamente da definição de logaritmo, temos

$$\log_\alpha 1 = z \Leftrightarrow \alpha^z = 1 \Leftrightarrow z = 0.$$

(c) Escreva $\log_\alpha \alpha^m = P$. Assim, pela definição de logaritmo,

$$\log_\alpha \alpha^m = P \Leftrightarrow \alpha^P = \alpha^m \Leftrightarrow P = m,$$

ou seja, vale (c).

(f) Sejam $\log_\alpha x \cdot y = P$, $\log_\alpha x = Q$ e $\log_\alpha y = R$. Precisamos mostrar que

$$P = Q + R.$$

Das igualdades estabelecidas acima, tiramos da definição de logaritmo as seguintes

$$\alpha^P = x \cdot y,$$

$$\alpha^Q = x,$$
$$\alpha^R = y.$$

Assim, temos de acordo com propriededes das potências estudadas em corpos, que

$$\alpha^P = x \cdot y = \alpha^Q \cdot \alpha^R = \alpha^{Q+R} \Leftrightarrow P = Q + R,$$

o que prova (f).

$\square$

E aí, gostaram das propriedades emoji-logarítmicas?

Exercícios

1. Use das propriedades dos logaritmos para determinar os valores de:

   (a) $\log_2 32$ (b) $\log 0,0001$ (c) $\log_{\frac{1}{3}} 27$

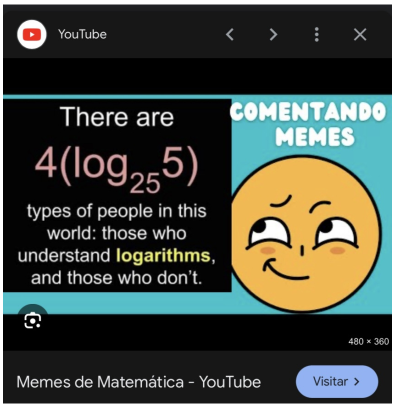
2. Sendo $\log_\beta A = 2$, $\log_\beta B = -1$ e $\log_\beta C = \dfrac{1}{2}$, determine o valor de $\log_\beta \dfrac{AB^2}{\sqrt[3]{C}}$.

3. Sendo $\log_\beta A = 3$, $\log_\beta B = -1$ e $\log_\beta C = \dfrac{1}{2}$, determine o valor de $\log_\beta \dfrac{\sqrt[5]{A^3B^2\sqrt{C}}}{\sqrt{A\sqrt[3]{C}}}$.

4. Sendo $a, b, c > 0$, $a, b, c \neq 1$ mostre que $\log_a b = \dfrac{\log_c a}{\log_c b}$, chamada de *fórmula da mudança de base de logaritmos.*

5. Encontre os valores de $x \in \mathbb{R}$ tais que $\log_2(x-1) = \log_4 x$.

6. Observe o meme abaixo, extraído do vídeo do Youtube, de título “memes de matemática”



O mesmo afirma que *“existem* $4\log_{25} 5$ *pessoas neste mundo: as que entendem logaritmos e aquelas que não entendem”*. Afirmamos que esta frase está correta. Justifique.