CÁLCULO 3

28/06/24 – AULA 19

Na aula anterior estudamos incrementos, o conceito de uma função ser diferenciável via incrementos, e sua equivalência com o conceito estudado anteriormente. Vimos também o conceito de diferencial total e enunciamos o teorema da Regra da cadeia:

R. da cadeia: Sejam $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ e $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ funções, com f diferenciável em $a \in \mathbb{R}^m$ e g diferenciável em $b = f(a) \in \mathbb{R}^n$. Então, $g \circ f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ é diferenciável em a, com

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a).$$

Obs: Repare que a FÓRMULA da REGRA DA CADEIA para várias variáveis é a mesma estudada no CÁLCULO 1. Porém, devemos observar seu significado a mais variáveis. O produto que aparece agora é um produto matricial.

Na notação de diferenciais, escrevemos:

$$(g\circ f)'(a) = g'(f(a)).f'(a)$$

$$d_a(g\circ f) = d_{f(a)}g \cdot d_a f \, .$$

Matricialmente, temos:
$$\begin{cases} g\circ f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k \\ f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \\ g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k . \end{cases}$$

$$\underbrace{[d_a(g\circ f)]}_{k\times m} = \underbrace{[d_{f(a)}g]}_{k\times n} \cdot \underbrace{[d_a f]}_{n\times m}$$

Como comentamos na aula passada, este teorema não é provado em um curso de cálculo.

Vejamos um exemplo de aplicação:

<u>Ex-1</u> $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y,z) = (\overbrace{x^2+y^2+z^2}^{f_1}, \overbrace{xyz}^{f_2})$

$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$; $g(x,y) = (\underbrace{x+y}_{g_1}, \underbrace{\cos xy}_{g_2}, \underbrace{x}_{g_3}, \underbrace{y^2}_{g_4})$

$g\circ f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$

Dado $a = (0,1,-2)$.

Calcular $(g \circ f)'(a)$.

SOLUÇÃO: Uma forma de resolver seria, primeiro calcular $g \circ f$ e depois calcular

$$(g \circ f)'(a) = d_a(g \circ f) = \left[\quad\right]_{4\times 3}$$

MATRIZ JACOBIANA.

Outra forma, é o uso da regra da Cadeia, como segue:

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a) \quad ; \quad \text{ou seja:}$$

$$\underbrace{\left[d_a(g \circ f)\right]}_{4\times 3} = \underbrace{\left[d_{f(a)}\, g\right]}_{4\times 2} \cdot \underbrace{\left[d_a f\right]}_{2\times 3} \quad . \quad \text{Assim:}$$

PRODUTO DE MATRIZES

$$\bullet \quad d_{f(a)}\, g = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} \\ \frac{\partial g_3}{\partial x} & \frac{\partial g_3}{\partial y} \\ \frac{\partial g_4}{\partial x} & \frac{\partial g_4}{\partial y} \end{bmatrix}_{f(a)}}_{4\times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -y \operatorname{sen} xy & -x \operatorname{sen} xy \\ 1 & 0 \\ 0 & 2y \end{bmatrix}_{f(a)}$$

$$a = (0, 1, -2) \Longrightarrow f(a) = \left(0^2 + 1^2 + (-2)^2,\ 0 \cdot 1 \cdot (-2)\right) = (5, 0)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -5\cdot 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bullet\ d_a f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{bmatrix}_{2\times 3} (a) = \begin{bmatrix} 2x & 2y & 2z \\ yz & xz & xy \end{bmatrix} (0,1,-2) =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ior ĵi'm, temor:

$$d_a(g\circ f) = d_{f(a)} g \cdot d_a f = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1\cdot 0 + 1\cdot(-2) & 2\cdot 1 + 1\cdot 0 & -4\cdot 1 + 1\cdot 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

No caso de $\mathbb{R}^m$ em $\mathbb{R}$ a regra da cadeia fica expressa como segue (faremos no caso $\mathbb{R}^2$ para simplificar a notação)

TEOREMA: (Regra da cadeia no caso escalar).

Seja $u = f(x,y)$, $u: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável, com $x = x(r,s)$ e $y = y(r,s)$, tal que

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial x}{\partial r}, \frac{\partial x}{\partial s}, \frac{\partial y}{\partial r}, \frac{\partial y}{\partial s}$$ existam.

Então:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r}$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s}$$

DEMONSTRAÇÃO: Seja $u = f(x,y)$ com

$x = x(r,s)$ e $y = y(r,s)$, diferenciável,

cumprindo as hipóteses do teorema.

Então, sendo u diferenciável, o incremento Δu é escrito como:

$$\boxed{\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \Delta y + \varepsilon_1 \cdot \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y ,} \quad (*)$$

onde Δx e Δy são incrementos em x e em y; e $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \underset{(\Delta x, \Delta y) \to 0}{\longrightarrow} 0$.

Vamos determinar $\frac{\partial u}{\partial r}$. Neste caso, teremos s fixo. Assim, Δx e Δy serão expressos por:

$$\begin{cases} \Delta x = x(r+\Delta r, s) - x(r,s), & \text{e} \\ \Delta y = y(r+\Delta r, s) - y(r,s) \end{cases}$$

Dividindo (*) por Δr, teremos:

$$\frac{\Delta u}{\Delta r} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta r} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta r} + \varepsilon_1 \cdot \frac{\Delta x}{\Delta r} + \varepsilon_2 \cdot \frac{\Delta y}{\Delta r}$$

Passando o limite com $\Delta r \to 0$, vamos obter:

$$\underbrace{\lim_{\Delta r \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta r}}_{\frac{\partial u}{\partial r}} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \lim_{\Delta r \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta r} + \frac{\partial u}{\partial y} \lim_{\Delta r \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta r} + $$

$$+ \varepsilon_1 \cdot \lim_{\Delta r \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta r} + \varepsilon_2 \cdot \lim_{\Delta r \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta r}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \underbrace{\lim_{\Delta r \to 0} \frac{x(r+\Delta r, s) - x(r,s)}{\Delta r}}_{\frac{\partial x}{\partial r}} +$$

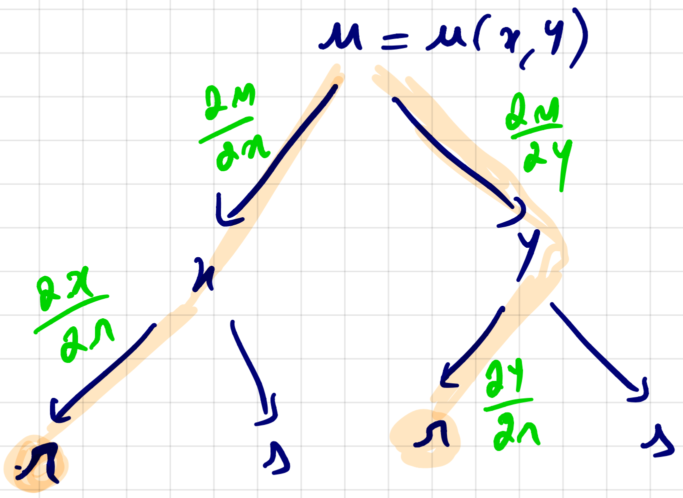
$$+\frac{\partial u}{\partial y}\underbrace{\lim_{\Delta r\to 0}\frac{y(r+\Delta r,s)-y(r,s)}{\Delta r}}_{\frac{\partial y}{\partial r}} + \underbrace{\varepsilon_1}_{0}\cdot\underbrace{\lim_{\Delta r\to 0}\frac{x(r+\Delta r,s)-x(r,s)}{\Delta r}}_{\frac{\partial x}{\partial r}} + \underbrace{\varepsilon_2}_{0}\cdot\underbrace{\lim_{\Delta r\to 0}\frac{y(r+\Delta r,s)-y(r,s)}{\Delta r}}_{\frac{\partial y}{\partial r}} \to 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}.$$

Analogamente se mostra a outra igualdade. $\square$

Obs.1 Esta regra se aplica para funções escalares com mais variáveis, i.e., de $\mathbb{R}^m$ em $\mathbb{R}$.

Uma maneira simples de memorizar a regra é esquematizar c.f. a "árvore" seguinte:



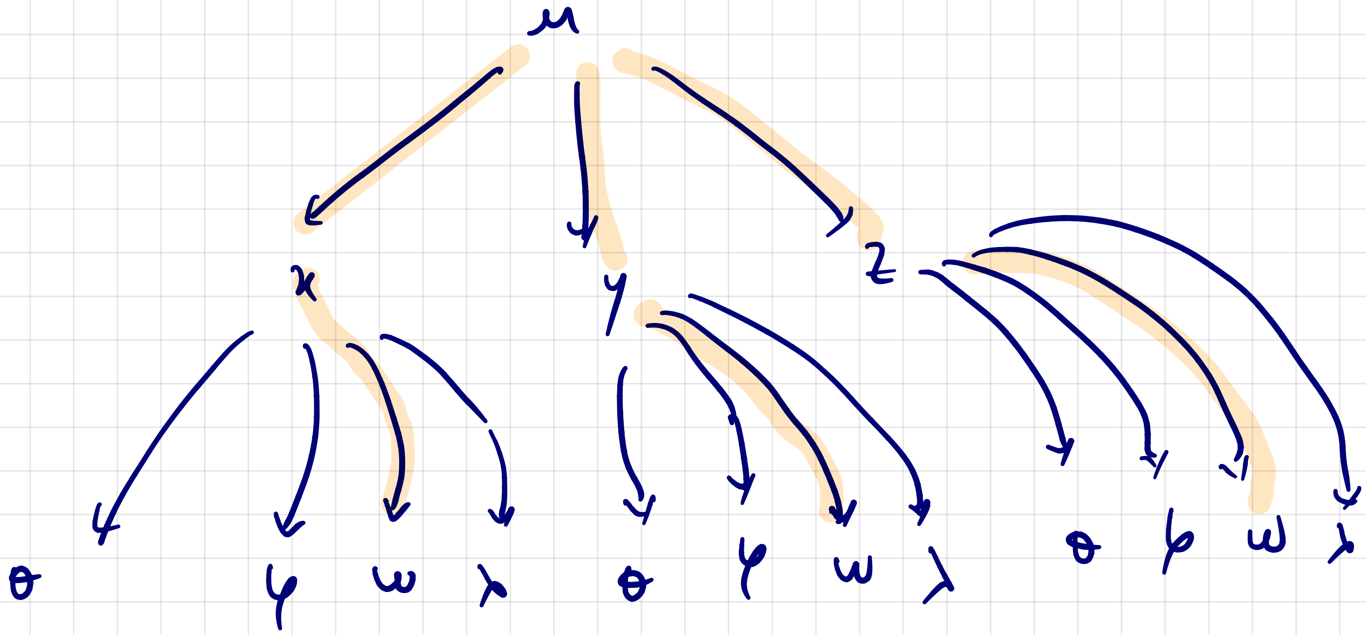
$x = x(r,s)$

$y = y(r,s)$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\times\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}$$

Para mais variáveis:

$$u = u(x,y,z) \quad ; \quad \begin{aligned} x &= x(\theta,\varphi,w,\lambda) \\ y &= y(\theta,\varphi,w,\lambda) \\ z &= z(\theta,\varphi,w,\lambda) \end{aligned}$$



$$\frac{\partial u}{\partial w} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial w} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial w} + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial w}$$

Ex: $u = x^2 + \ln(xy)$ $\quad \begin{cases} x = r^2 s \\ y = r^2 + s^2 \end{cases}$

$$\frac{\partial u}{\partial s} = ?$$

solução: $\dfrac{\partial u}{\partial s} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial s} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial s}$; onde:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + \frac{\cancel{y}}{x\cancel{y}} = 2x + \frac{1}{x} ;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}y} = \frac{1}{y} ;$$

$$\frac{\partial x}{\partial s} = r^2 \quad ; \quad \frac{\partial y}{\partial s} = 2s .$$

Portanto, obtemos:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s}$$

$$= \left(2x + \frac{1}{x}\right) \cdot r^2 + \frac{1}{y} \cdot (2s) =$$

$\to x = r^2 s \; ; \; y = r^2 + s^2$

$$= \left(2r^2 s + \frac{1}{r^2 s}\right) r^2 + \frac{1}{r^2+s^2} \cdot 2s$$

$$= 2r^4 s + \frac{1}{s} + \frac{2s}{r^2+s^2} .$$