ALGUMAS RESOLUÇÕES:

Lista 02 de Exercícios - Funções de várias variáveis reais

1. Em cada item a seguir, determine o domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ de $f : \Omega \to \mathbb{R}$ e faça um esboço do domínio:

(a) $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2-1}$

(b) $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$

(c) $f(x,y) = \sqrt{x^2-4y^2+16}$

(d) $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$

(e) $f(x,y) = \ln(x^2+y)$

(f) $f(x,y) = \operatorname{arcsen}(x+y)$

(g) $f(x,y) = \operatorname{arcsen}\dfrac{x}{x+y}$

(h) $f(x,y) = \arctan\dfrac{x+y}{x-y}$

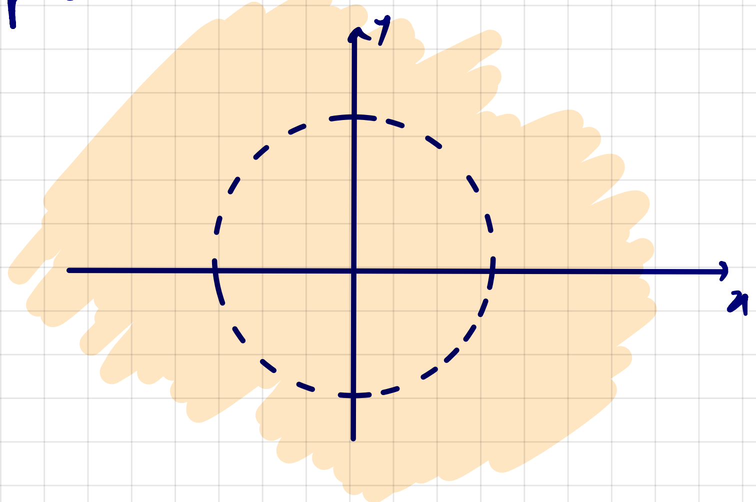
(a) condição de existência: $x^2+y^2-1 \neq 0$

$\iff x^2+y^2 \neq 1.$

ou seja; $\Omega = D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \neq 1\}$

(i.e.; o domínio Ω será todo o $\mathbb{R}^2$, exceto pontos sobre a circunferência unitária centrada na origem)

gráfico do domínio:



(c) $f(x,y) = \sqrt{x^2-4y^2+16}$

condição de existência: $x^2-4y^2+16 \geq 0$

$\iff x^2-4y^2 \geq -16 \iff 4y^2-x^2 \leq 16$

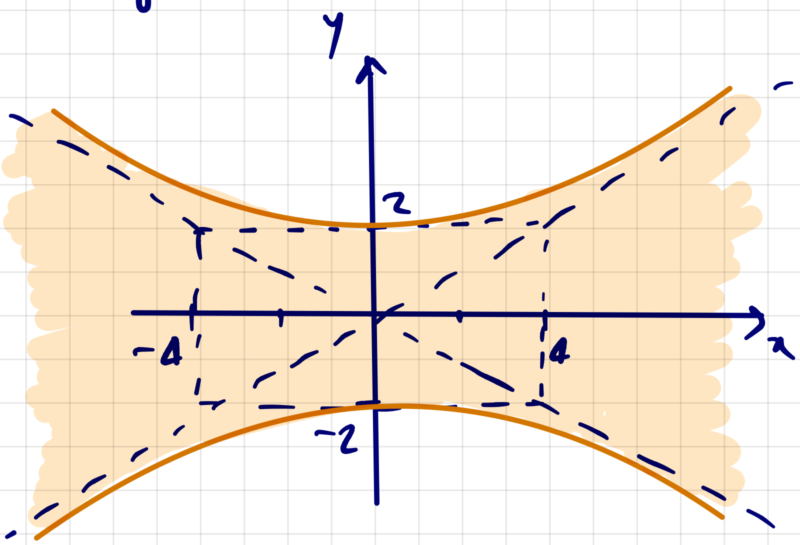
$$\Leftrightarrow \quad \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{16} \leq 1$$

região interna da hipérbole $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{16} = 1$.

e como é $\leq$, inclui os pontos da fronteira.

Logo: $D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4y^2 - x^2 \leq 16\}$

gráfico do domínio:



(d) $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$.

condição de existência: $1 - x^2 - y^2 > 0 \Leftrightarrow$

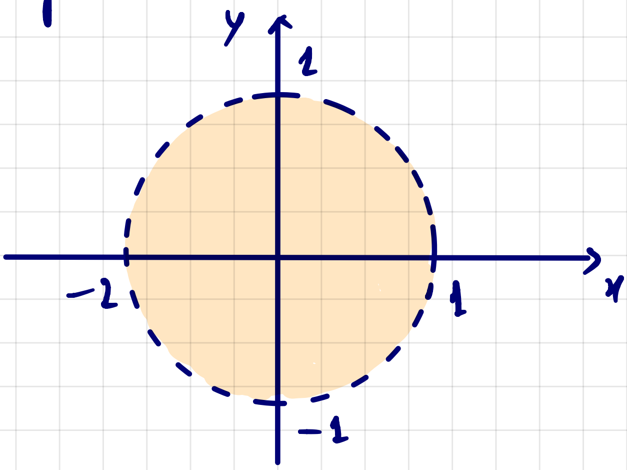
$\Leftrightarrow -x^2 - y^2 > -1 \Leftrightarrow$

$x^2 + y^2 < 1$

região interna da circunferência unitária centrada na origem do $\mathbb{R}^2$, sem a fronteira.

$D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$.

gráfico do domínio:



(e) $f(x,y) = \ln(x^2+y)$.

lembre-se do estudo de logaritmos: $\ln x$ tem sentido se $x>0$

condição de existência: $x^2+y>0$

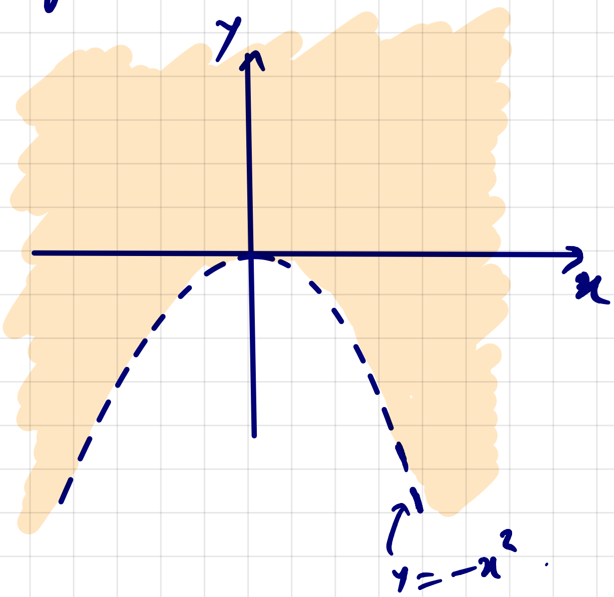
$\Updownarrow$

$y > -x^2$

região acima da parábola $y=x^2$, retirando os pontos de fronteira, pois a desigualdade é "<".

$D(f) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y>-x^2\}$.

gráfico do domínio:



(g) $f(x,y) = \operatorname{arcsen}\dfrac{x}{x+y}$. Primeiramente, lembre da Trigonometria que:

$u = \operatorname{arcsen} v \Leftrightarrow v = \operatorname{sen} u$; e então

$-1 \le v = \operatorname{sen} u \le 1$.

Assim, temos a seguinte cond. de existência:

$$z = \operatorname{arcsen}\frac{x}{x+y} \Leftrightarrow \underbrace{-1 \le \overbrace{\frac{x}{x+y}}^{(I)}}_{(II)} \le 1.$$

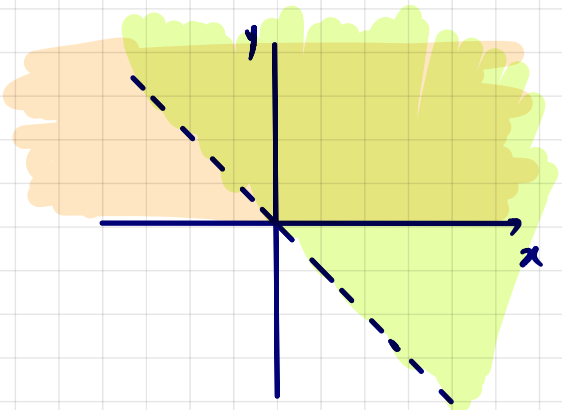
Logo: $D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le \frac{x}{x+y} \le 1\}$.

$$(I): \frac{x}{x+y} \le 1 \iff \frac{\cancel{x} - \cancel{x} - y}{x+y} \le 0 \Rightarrow \frac{y}{x+y} \ge 0$$

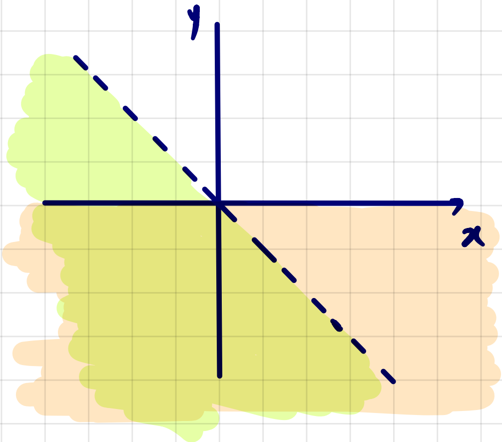
$$\Updownarrow$$

$$\iff y \ge 0 \text{ e } x+y > 0 \text{ ou } y \le 0 \text{ e } x+y < 0$$

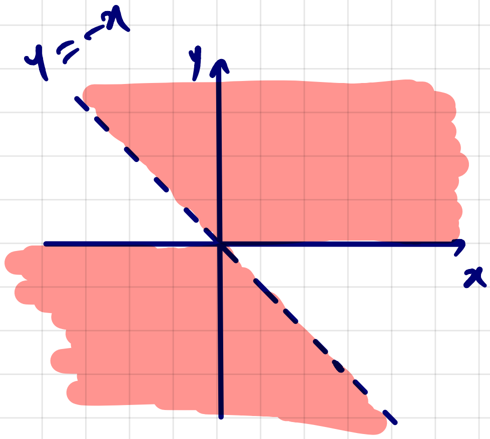
$$\iff y \ge 0 \text{ e } y > -x \text{ ou } y \le 0 \text{ e } y < -x$$



ou



$$\Downarrow$$



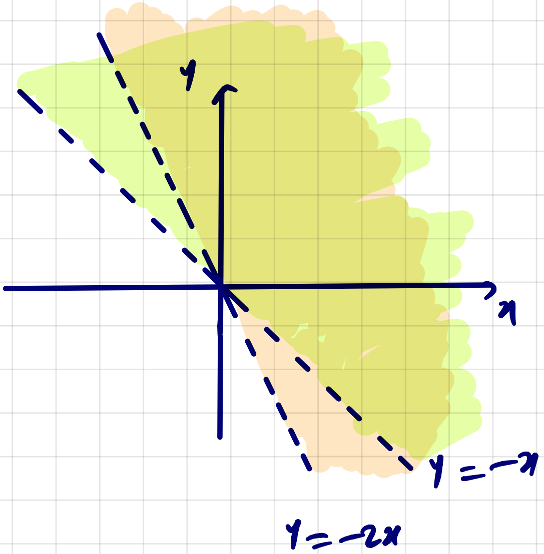
esta solução é para a desigualdade (I), ou seja, onde $\frac{x}{x+y} \le 1$.

Resta fazer a (II) e tomar a interseção pois devemos ter $-1 \le \frac{x}{x+y} \le 1$.

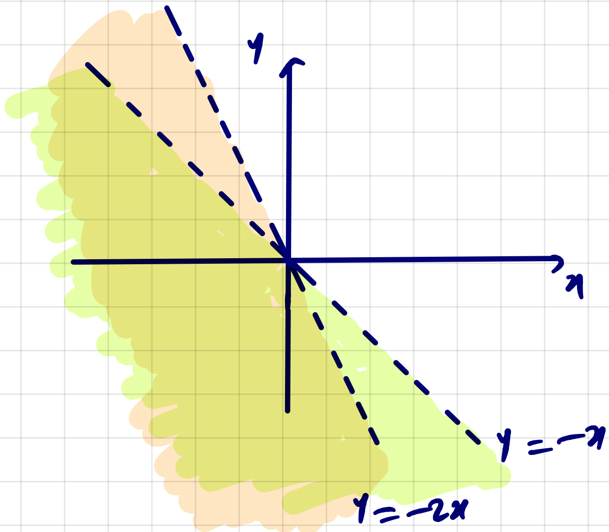
$$\text{II}: \frac{x}{x+y} \ge -1 \iff \frac{x}{x+y} + 1 \ge 0 \iff \frac{x+x+y}{x+y} \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2x+y}{x+y} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x+y \geq 0 \ \text{ e } \ x+y>0 \\ \text{ou} \\ 2x+y \leq 0 \ \text{ e } \ x+y<0. \end{cases}$$

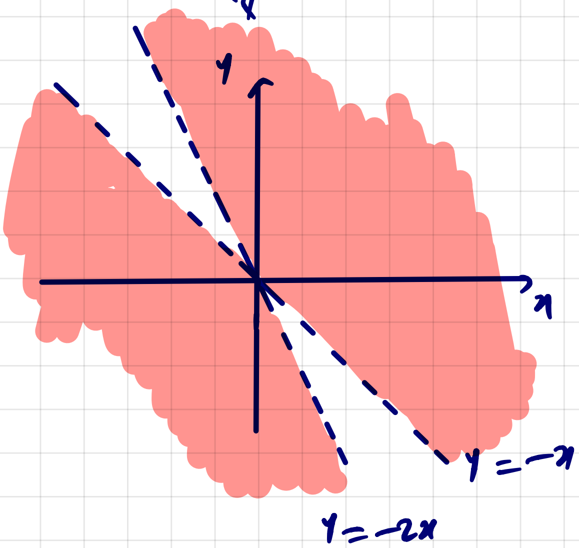
$$\Leftrightarrow \quad y \geq -2x \ \text{ e } \ y > -x \quad \text{ ou } \quad y \leq -2x \ \text{ e } \ y < -x.$$



ou

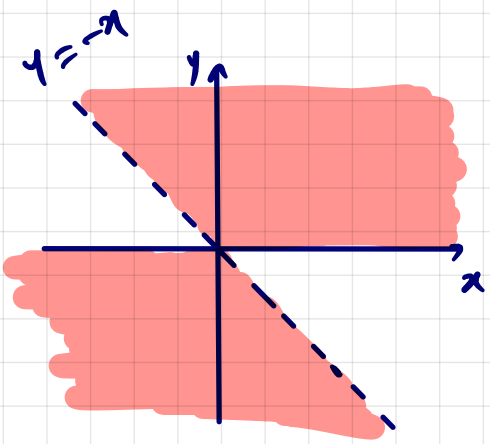


$\Downarrow$

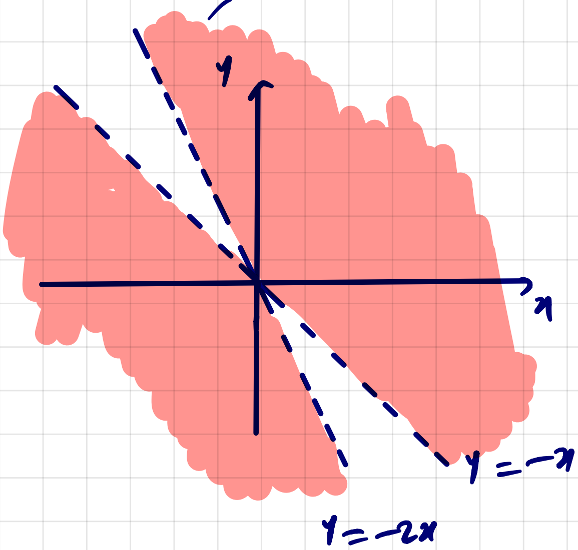


(solução II).

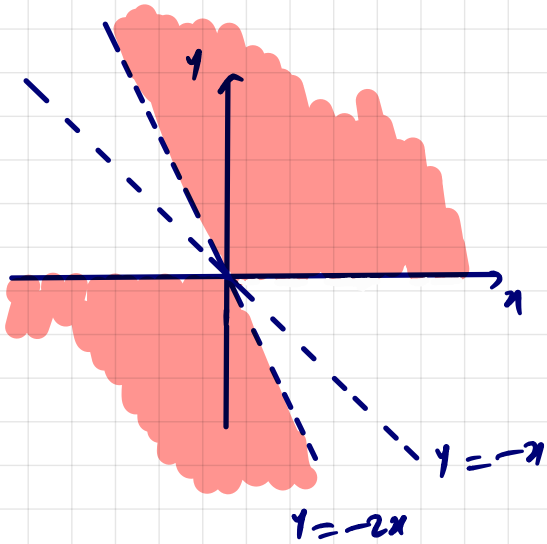
Por fim, devemos ter (I) $\cap$ (II). Obtendo:



$\cap$



$\Longrightarrow$



(gráfico do domínio)

3. Esboce a curva de cada função abaixo.

(a) $f(t) = (t, t^2, t^3)$, $\quad 0 \le t \le 1$.

(b) $f(t) = (4-4t)\vec{i} + (4-4t)\vec{j}$, $t \in [0,2]$.

(c) $f(t) = (\ln t, t, 1)$, $t > 0$

(d) $f(t) = (6\,\mathrm{sen}\,t, 4, 25\cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$.

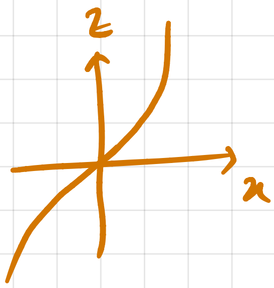
(e) $f(t) = (8 - 4\,\mathrm{sen}\,t, 2\cos t, 4\,\mathrm{sen}\,t)$

(f) $f(t) = (\mathrm{sen}\,t, t, \cos t)$

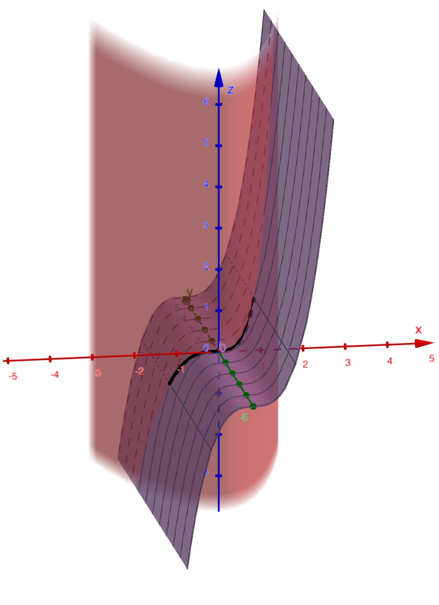
(a) $\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \\ z = t^3 \end{cases}$; $0 \le t \le 1$.

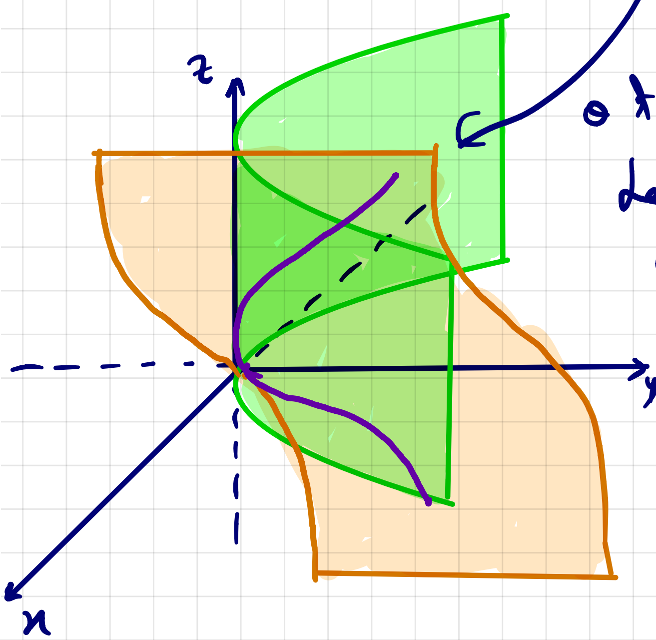
$y = x^2$

$z = x^3$



$\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1 \\ 0 \le z \le 1 \end{cases}$



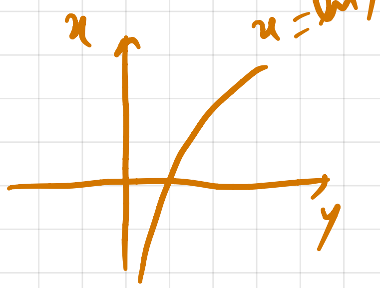


o traçado fica dentro de um cubo

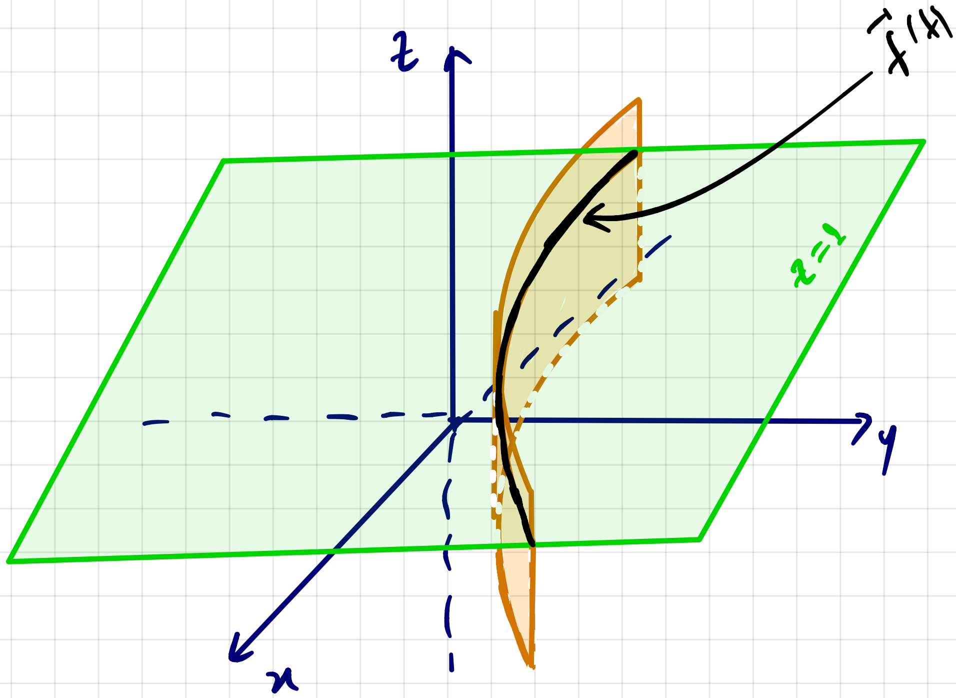
(c) $\vec{f}(t) = (\ln t, t, 1)$; $t > 0$.

$$\left\{\begin{array}{l} x = \ln t \\ y = t \\ z = 1 \end{array}\right.$$

$\left.\begin{array}{l} x = \ln t \\ y = t \end{array}\right\} \longrightarrow x = \ln y$



$z = 1 \longrightarrow$ plano paralelo ao plano xy, passando na "altura" $z = 1$.



4. Obtenha o domínio Ω de cada função vetorial $\vec{f} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ a seguir:

(a) $\vec{f}(t) = \sqrt{2t+6}\,\vec{i} + \sqrt{\dfrac{1-t}{2-t}}\,\vec{j} + \ln(2-t)\vec{k}$.

(b) $\vec{f}(t) = \left(\dfrac{1}{t},\ \dfrac{t+2}{\sqrt{t^2-t}},\ e^{1-t}\right)$.

(c) $\vec{f}(t) = (\sec t,\ t,\ \ln t)$.

(d) $\vec{f}(t) = \ln(t+1)\vec{i} + \arctan t\vec{j}$

(b) condições de existência:

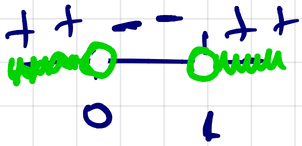
- $t \neq 0$

D_1

- $t^2 - t > 0$.
- $1 - t \in \mathbb{R}$

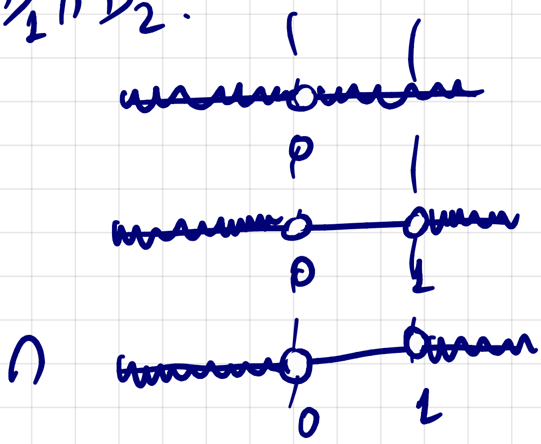
zeros: $t^2 - t = 0 \Leftrightarrow t(t-1) = 0$ $\begin{cases} t = 0 \\ t = 1 \end{cases}$

D_2



Assim, teremos:

$D = D_1 \cap D_2$:



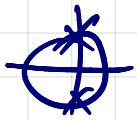
$\Rightarrow D = (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$.

(c) $\vec{f}(t) = (\sec t, t, \ln t)$

condições de existência:

- $\exists \sec t \iff \cos t \neq 0$ (pois $\sec t = \frac{1}{\cos t}$)

$$\Updownarrow$$



$$t \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, \forall k \in \mathbb{Z}.$$

- $t \in \mathbb{R}$

- $t > 0$ (pois $\ln t$ tem sentido se $t > 0$)

$D(f) = \{ t \in \mathbb{R}$ tal que $t > 0$ e $t \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, \forall k \in \mathbb{Z} \}$.

7. Desenhe as superfícies definidas parametricamente pelas seguintes funções:

(a) $f\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, onde $u, v \in \mathbb{R}$

(b) $f\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos u \operatorname{sen} v\\ \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v\\ \cos v\end{pmatrix}$, onde $0 \leq u \leq 2\pi$, $0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}$.

este item foi feito em aula.

(a) Reescrevemos a f do seguinte modo:

$$f(u,v) = (x,y,z) = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\\1&0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix};$$

PRODUTO MATRICIAL

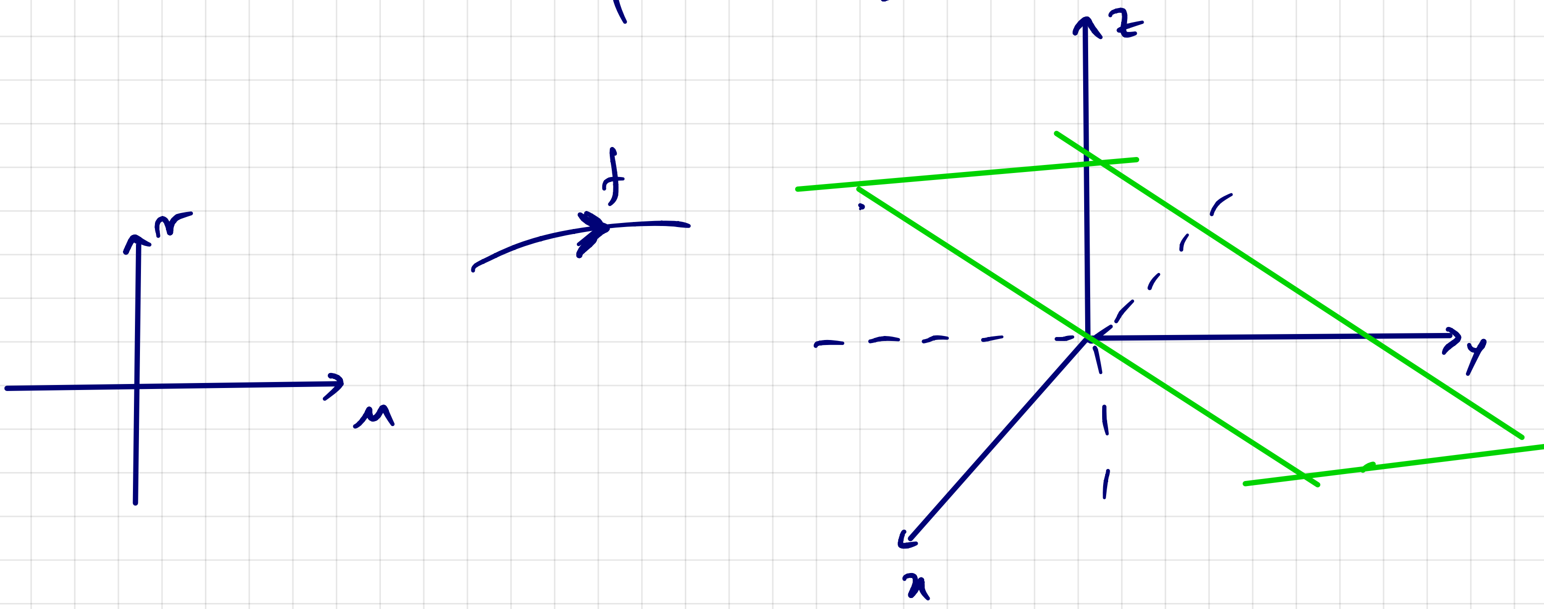
$$= (u, v, u) + (1,1,1) =$$

$$= (u+1, v+1, u+1)$$

· Ou seja, temos $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,

$$f(u,v) = (\underbrace{u+1}_{\in \mathbb{R}}, \underbrace{v+1}_{\in \mathbb{R}}, \underbrace{u+1}_{\in \mathbb{R}})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = u+1 \\ y = v+1 \in \mathbb{R} \\ z = u+1 \end{cases} \quad x = z$$



f toma todos os pontos $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ e manda para pontos da forma (x, y, x), ou seja, para um plano no $\mathbb{R}^3$, passando pela bissetriz $x = z$ no plano xz (dos quadrantes ímpares).

8. Seja a função vetorial $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}.$$

Quais são as funções coordenadas de f? Considere o espaço domínio sendo o plano xy e o espaço imagem como sendo o plano uv. Assim:

(a) Determine a imagem do segmento da reta $y = x$ entre $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(b) Determine a imagem da região definida por $0 < x$, $0 < y$ e $x^2 + y^2 < 1$.

(c) Determine o ângulo entre as imagens das retas $y = 0$ e $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$. (Resp.: $\frac{\pi}{3}$) .

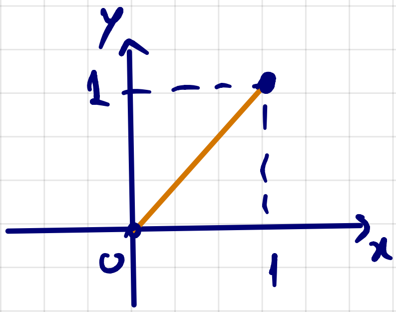
$f(x,y) = (x^2-y^2, 2xy)$, $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

$f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$; onde

$$\begin{cases} f_1(x,y) = x^2-y^2 \\ f_2(x,y) = 2xy \end{cases}$$

(FUNÇÕES COORDENADAS DA f) .

(a) $y = x$ entre $(0,0)$ e $(1,1)$.



$\xrightarrow{f}$? imagem do segmento. ?

↳ neste caso, temos: $\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 & \text{e} \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$.

Assim; escrevendo $(x,y) \longmapsto (u,v)$; temos:

$$\begin{cases} u = x^2-y^2 \\ v = 2xy \end{cases}$$; e como

$0 \le x \le 1$ e $0 \le y \le 1$, então

$0 \le x^2 \le 1$ (*) e $0 \le y^2 \le 1$. $\hookrightarrow$ $-1 \le -y^2 \le 0$ (**)

e assim; somando (*) e (**):

$$0 - 1 \le x^2 - y^2 \le 1 + 0$$

$$-1 \le \underbrace{x^2 - y^2}_{u} \le 1 \text{; i.e.,} \quad \boxed{-1 \le u \le 1.}$$

Além disso:

$$2\cdot 0\cdot 0 \le 2xy \le 2\cdot 1\cdot 1 \iff 0 \le \underbrace{2xy}_{v} \le 2$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{0 \le v \le 2}$$

E, quando $x = y := t$; teremos,

$$\begin{cases} u = t^2 - t^2 = 0 \\ v = 2tt = 2t^2 \end{cases} \Rightarrow (0, 2t^2); \quad 0 \le t \le 1$$

Ou seja, f manda o segmento da reta $y = x$ em $[0,1]$ para o segm. vertical $(0, 2t^2)$, onde $t \in [0,1]$.

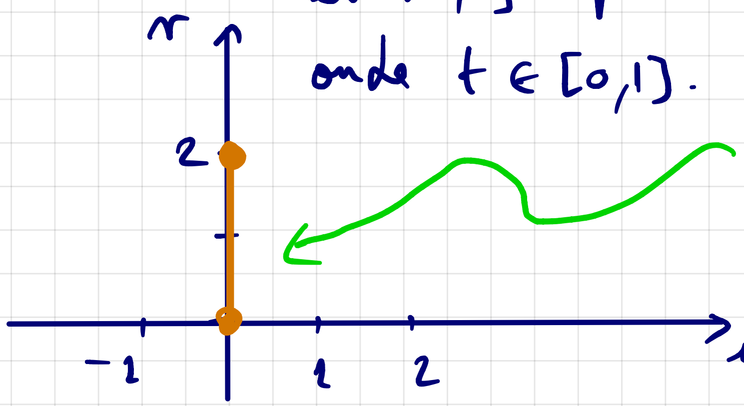
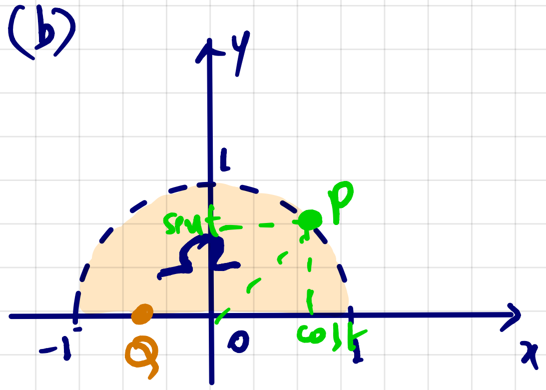


imagem procurada.

(b)



$x^2+y^2<1$, $y>0$

$f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$f(\Omega) = ?$

$f(x,y) = (x^2-y^2, 2xy)$

Note que, dado $P(\cos t, \operatorname{sen} t)$, $t \in [0,\pi]$, um ponto qualquer sobre a semicircunferência dada.

Então:

$$f(\cos t, \operatorname{sen} t) = (\cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t, 2 \cdot \cos t \operatorname{sen} t)$$

$$= (\cos 2t, \operatorname{sen} 2t) \text{ ; e é tal que}$$

$$\cos^2 2t + \operatorname{sen}^2 2t = 1.$$

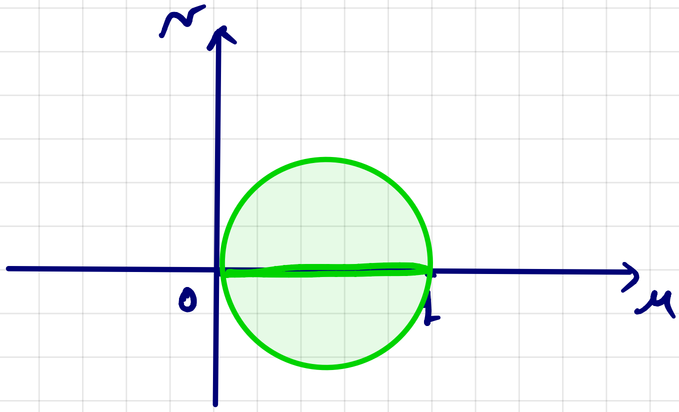
$$t \in [0,\pi] \Rightarrow 2t \in [0, 2\pi]$$

Ou seja, pontos sobre a semicircunferência são enviados para uma circunferência no plano uv.

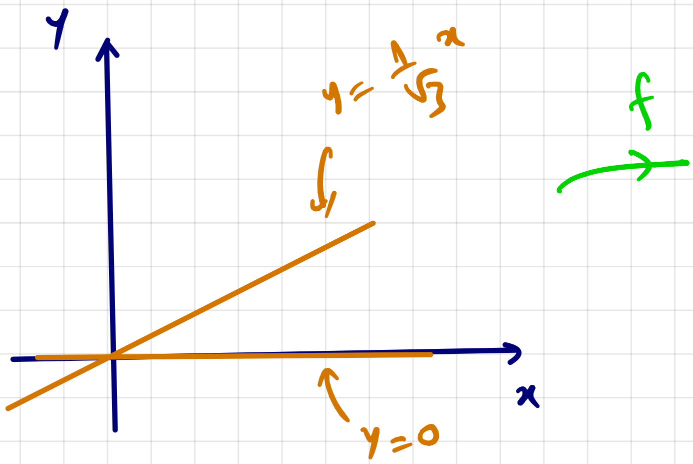
Sejam agora pontos da forma $Q(t, 0)$; $t \in [-1, 1]$; (segmento horizontal fronteira de Ω)

$$f(t,0) = (t^2-0^2, 2.t.0) = (t^2, 0);$$

fornece segmento $(0,0)$ até $(1,0)$ no plano uv.



(c)



$f(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$

• $y=0$: PONTOS DA FORMA $(x,0)$: $f(x,0) = (x^2 - 0^2, 2x.0)$

$= (x^2, 0) = (u,v)$

$= x^2(1,0)$

UM MÚLTIPLO POSITIVO DO VETOR $(1,0)$

• $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$: PONTOS DA FORMA: $\left(x, \frac{1}{\sqrt{3}}x\right)$:

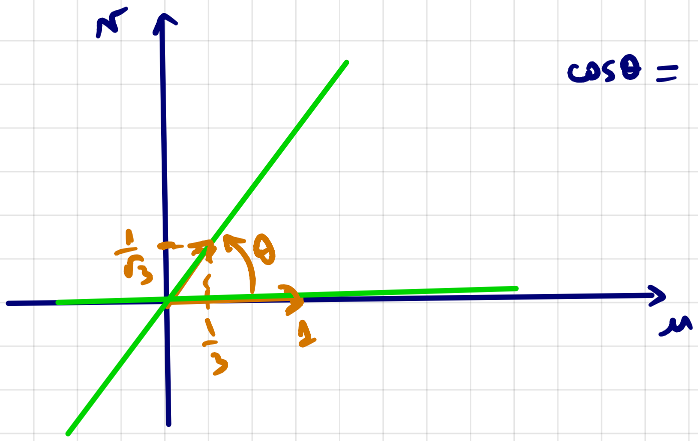
$$f\left(x, \frac{1}{\sqrt{3}}x\right) = \left(x^2 - \frac{1}{3}x^2, 2x.\frac{1}{\sqrt{3}}x\right)$$

$$= \left(\frac{2}{3}x^2, \frac{2}{\sqrt{3}}x^2\right)$$

$$= 2x^2\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$ → UM MÚLTIPLO POSITIVO DO VETOR $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

Denote $\vec{w}_1 = (1,0)$ e $\vec{w}_2 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Assim, teremos no plano uv as seguintes imagens das retas $y=0$ e $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x$:



$$\cos\theta = \frac{\vec{w_1}\cdot\vec{w_2}}{\|\vec{w_1}\|\cdot\|\vec{w_2}\|} =$$

$$\vec{w_1}\cdot\vec{w_2} = (1,0)\cdot\left(\frac{1}{3},\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{3}+0=\frac{1}{3}$$

$$\|\vec{w_1}\| = \sqrt{(1)^2+(0)^2} = 1$$

$$\|\vec{w_2}\| = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}.$$

Assim:

$$\cos\theta = \frac{\frac{1}{\cancel{3}}}{1\cdot\frac{2}{\cancel{3}}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\theta = 60^\circ}$$

---

10. O potencial elétrico no ponto (x,y) do plano xy é $V(x,y)$ volts, onde

$$V(x,y) = \frac{4}{\sqrt{9-x^2-y^2}}.$$

Trace as curvas equipotenciais de V em $16, 12, 8, 4, 1, \frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$.

Basta resolver cada equação:

- $V = V(x,y) = 16$:

$$16 = \frac{4}{\sqrt{9-x^2-y^2}} \Leftrightarrow 4 = \frac{1}{\sqrt{9-x^2-y^2}}$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{9-x^2-y^2}\right)^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 9 - x^2 - y^2 = \frac{1}{16}$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 = 9 - \frac{1}{16} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{x^2 + y^2 = \frac{143}{16}}$$

circunf. centrada na origem e raio $\frac{\sqrt{143}}{4}$.

• $V = V(x,y) = 12$:

$$12 = \frac{4}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}} \Leftrightarrow 3 = \frac{1}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{9 - x^2 - y^2} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 9 - x^2 - y^2 = \frac{1}{9}$$

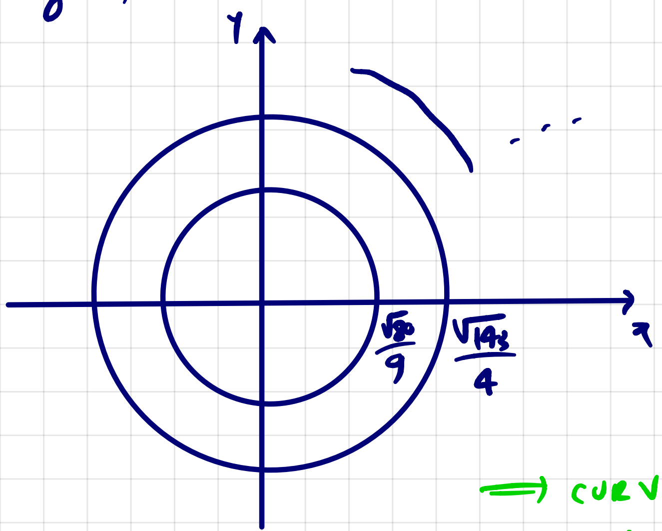
$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 9 - \frac{1}{9}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = \frac{80}{9}$$

circunf. centrada na origem e raio $\frac{\sqrt{80}}{9}$.

et cetera (...) [ou seja, assim para os outros casos]

Ou seja, vamos obter as curvas de nível:



$\Longrightarrow$ CURVAS EQUIPOTENCIAIS SERÃO CIRCUNFERÊNCIAS CONCÊNTRICAS.