Fundação Universidade Federal de Pelotas
Departamento de Matemática e Estatística
Cursos de Física e Química
Primeira Prova de Cálculo 3
Prof. Dr. Maurício Zahn

Nome: **Data:** 24/06/2024

Instrução. Das seis questões abaixo, escolha 5 para resolver. A nota N será dada por $N = \frac{\text{número de acertos}\times 10{,}0}{\sum \text{pesos}-1}$.
Marque no quadrado $\square$ a questão que não será feita.

$\square$ **Questão 01.** [Peso 2] Seja $\mathbb{R}^+$ o conjunto dos números reais positivos. Mostre que a aplicação $d(x,y) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|$ define uma métrica em $\mathbb{R}^+$. Em seguida, desenhe a bola $B_1(\frac{1}{2}) \subset \mathbb{R}^+$.

$\square$ **Questão 02.** Seja $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função dada por $f(x,y) = \sqrt{x+y} + \ln(1-xy)$.

(a) [Peso 1] Obtenha o domínio Ω e faça um esboço da região do domínio.

(b) [Peso 0,5] O domínio Ω é um conjunto aberto, fechado, ou nem aberto e nem fechado do $\mathbb{R}^2$? Justifique. Conclua se Ω é um compacto do $\mathbb{R}^2$, justificando.

(c) [Peso 1] A origem $(0,0)$ é um ponto interior de Ω? É um ponto aderente a Ω? Justifique suas respostas.

(d) [Peso 0,5] Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}$.

$\square$ **Questão 03.** [Peso 2] Seja a função vetorial $\vec{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dada por $\vec{f}(t) = (2\operatorname{sen} t,\, 2t,\, 2\cos t)$. Obtenha um vetor tangente unitário ao gráfico de $\vec{f}$ no ponto $P(2,\pi,0)$. Obtenha também a equação da reta tangente ao gráfico de $\vec{f}$ no mesmo ponto P dado.

$\square$ **Questão 04.** Seja $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função dada por $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - 4y^2}$.

(a) [Peso 1] Determine o domínio Ω de f. Esboce o gráfico da região do domínio.

(b) [Peso 1] Esboce o gráfico de f no $\mathbb{R}^3$.

(c) [Peso 2] Encontre a equação da curva $\gamma := \vec{g}(t)$ obtida pelo intercepto do gráfico de f com o plano $y = \frac{1}{2}$. Em seguida, obtenha o vetor tangente à γ no ponto $P(1, \frac{1}{2}, \sqrt{2})$.

(d) [Peso 1] Calcule $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

$\square$ **Questão 05.** [Peso 1] Verifique se a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{5x^2y}{x^2+y^2}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se} \ \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$

é contínua na origem.

$\square$ **Questão 06.** Defina $\vec{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ por $\vec{F}(x,y) = \Big(\ln(xy - y^2),\, \sqrt{9 - x^2 - y^2},\Big)$.

(a) [Peso 2] Construa o esboço gráfico do domínio Ω de $\vec{F}$. O ponto $A(3,0)$ é um ponto interior de Ω? Justifique. Esse mesmo ponto pertence ao fecho de Ω? Justifique. Decida se Ω é um compacto do $\mathbb{R}^2$.

(b) [Peso 1] Dada uma função vetorial $\vec{F} : X \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$,

$$\vec{F}(x_1, x_2, ..., x_m) = (F_1(x_1, ..., x_m), ..., F_m(x_1, ..., x_m)),$$

definimos o *divergente* de $\vec{F}$ por $\operatorname{div}(\vec{F}) = \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial F_2}{\partial x_2} + ... + \dfrac{\partial F_m}{\partial x_m}$. Isto posto, calcule $\operatorname{div}\vec{F}$ da função dada no exercício.