Fundação Universidade Federal de Pelotas
Departamento de Matemática e Estatística
Cursos de Física e Química
Primeira Prova de Cálculo 3
Prof. Dr. Maurício Zahn

Nome: **Data:** 24/06/2024

Instrução. Das seis questões abaixo, escolha 5 para resolver. A nota N será dada por $N = \frac{\text{número de acertos}\times 10,0}{\sum \text{pesos}-1}$.
Marque no quadrado □ a questão que não será feita.

□ **Questão 01.** [Peso 2] Seja $\mathbb{R}^+$ o conjunto dos números reais positivos. Mostre que a aplicação $d(x,y) = \left|\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}\right|$ define uma métrica em $\mathbb{R}^+$. Em seguida, desenhe a bola $B_1(\frac{1}{2}) \subset \mathbb{R}^+$.

□ **Questão 02.** Seja $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função dada por $f(x,y) = \sqrt{x+y} + \ln(1-xy)$.

(a) [Peso 1] Obtenha o domínio Ω e faça um esboço da região do domínio.

(b) [Peso 0,5] O domínio Ω é um conjunto aberto, fechado, ou nem aberto e nem fechado do $\mathbb{R}^2$? Justifique. Conclua se Ω é um compacto do $\mathbb{R}^2$, justificando.

(c) [Peso 1] A origem $(0,0)$ é um ponto interior de Ω? É um ponto aderente a Ω? Justifique suas respostas.

(d) [Peso 0,5] Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}$.

□ **Questão 03.** [Peso 2] Seja a função vetorial $\vec{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dada por $\vec{f}(t) = (2\,\mathrm{sen}\,t,\ 2t,\ 2\cos t)$. Obtenha um vetor tangente unitário ao gráfico de $\vec{f}$ no ponto $P(2,\pi,0)$. Obtenha também a equação da reta tangente ao gráfico de $\vec{f}$ no mesmo ponto P dado.

□ **Questão 04.** Seja $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função dada por $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - 4y^2}$.

(a) [Peso 1] Determine o domínio Ω de f. Esboce o gráfico da região do domínio.

(b) [Peso 1] Esboce o gráfico de f no $\mathbb{R}^3$.

(c) [Peso 2] Encontre a equação da curva $\gamma := \vec{g}(t)$ obtida pelo intercepto do gráfico de f com o plano $y = \frac{1}{2}$. Em seguida, obtenha o vetor tangente à γ no ponto $P(1, \frac{1}{2}, \sqrt{2})$.

(d) [Peso 1] Calcule $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

□ **Questão 05.** [Peso 1] Verifique se a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{5x^2y}{x^2+y^2}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

é contínua na origem.

□ **Questão 06.** Defina $\vec{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ por $\vec{F}(x,y) = \Big(\ln(xy - y^2),\ \sqrt{9 - x^2 - y^2},\Big)$.

(a) [Peso 2] Construa o esboço gráfico do domínio Ω de $\vec{F}$. O ponto $A(3,0)$ é um ponto interior de Ω? Justifique. Esse mesmo ponto pertence ao fecho de Ω? Justifique. Decida se Ω é um compacto do $\mathbb{R}^2$.

(b) [Peso 1] Dada uma função vetorial $\vec{F} : X \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$,

$$\vec{F}(x_1, x_2, ..., x_m) = (F_1(x_1, ..., x_m), ..., F_m(x_1, ..., x_m)),$$

definimos o *divergente* de $\vec{F}$ por $\mathrm{div}(\vec{F}) = \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial F_2}{\partial x_2} + ... + \dfrac{\partial F_m}{\partial x_m}$. Isto posto, calcule $\mathrm{div}\vec{F}$ da função dada no exercício.

01) $d(x,y) = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right|$; em $\mathbb{R}^+$.

Dados $x, y, z \in \mathbb{R}^+$; então:

(i) $d(x,y) = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| \geq 0$ e

$$d(x,y) = 0 \Leftrightarrow \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{y} \Leftrightarrow x = y$$

Logo, vale a positividade.

(ii) $d(x,y) = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| = \left| \frac{1}{y} - \frac{1}{x} \right| = d(y,x)$;

1.0

logo, vale a simetria.

(iii) $d(x,y) = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{z} + \frac{1}{z} - \frac{1}{y} \right| \leq$

$$\leq \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{z} \right| + \left| \frac{1}{z} - \frac{1}{y} \right| = d(x,z) + d(z,y).$$

DESIGUALDADE TRIANGULAR DO MÓDULO

Logo, vale a desigualdade triangular.

Portanto, $(\mathbb{R}^+, d)$ é um espaço métrico.

$$B_1\left(\frac{1}{2}\right) = \left\{ x \in \mathbb{R}^+ : d\left(x, \frac{1}{2}\right) < 1 \right\} =$$

$$= \left\{ x \in \mathbb{R}^+ : \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{\frac{1}{2}} \right| < 1 \right\}$$

$$= \left\{ x \in \mathbb{R}^+ : \left| \frac{1}{x} - 2 \right| < 1 \right\}$$

Ou seja; $B_1\left(\frac{1}{2}\right)$ será tal que

$$-1 < \frac{1}{x} - 2 < 1 \;\Leftrightarrow\; 1 < \frac{1}{x} < 3$$

$+2$

1.0

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x} < 3 \;\text{e}\; \frac{1}{x} > 1 \;\Leftrightarrow\; x < \frac{1}{3} \;\text{e}\; x < 1$$

$B_1\left(\frac{1}{2}\right)$:

$\frac{1}{3}$ $\quad$ 1

---

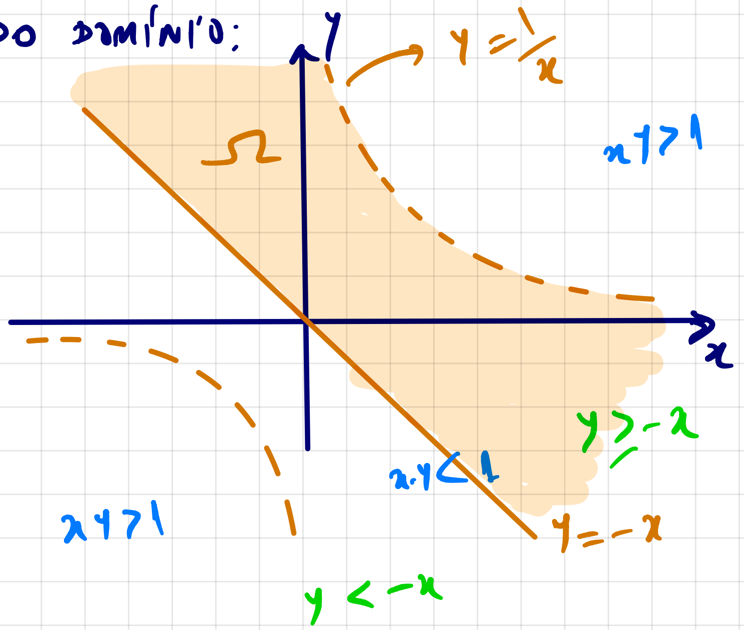
02) $f(x,y) = \sqrt{x+y} + \ln(1 - xy)$.

(a) condições de existência:

- $x + y \geq 0 \Rightarrow y \geq -x$
- $1 - xy > 0 \Rightarrow xy < 1$ "$y = \frac{1}{x}$"

$$\Omega = D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq -x \;\text{e}\; x.y < 1\}.$$

GRÁFICO DO DOMÍNIO:



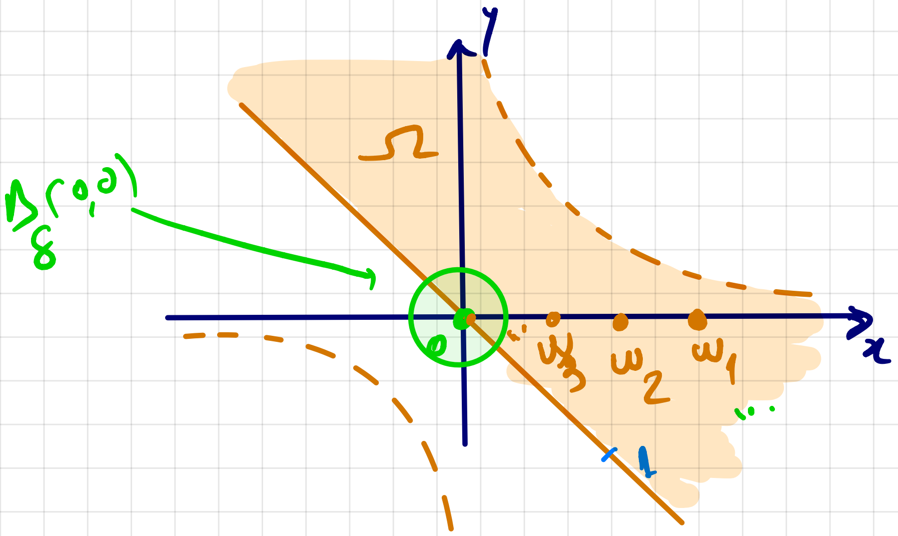
1.0

(b) Ω não é aberto e nem fechado do $\mathbb{R}^2$, pois parte da fronteira pertence à Ω (onde $y=-x$) e parte da fronteira não (onde $xy=1$).

0,5

Ω também não é compacto pois não é limitado e, tão pouco fechado.

(c) Note que $(0,0) \in \Omega$, mas não é interior a Ω, pois, $\forall \delta > 0$, a bola $B_\delta(0,0)$ não fica inteiramente contida em Ω:



1,0

Porém, $(0,0)$ é aderente a Ω, i.e; $(0,0) \in \overline{\Omega}$; pois podemos tomar a seq. $(x_n, y_n) \subset \Omega$ dada por:

$w_n := (x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, 0\right)$, que é tal que $(x_n, y_n) \to (0,0)$.

(d) $\frac{\partial f}{\partial x} = ?$ $\qquad f(x,y) = (x+y)^{\frac{1}{2}} + \ln(1-xy)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2}(x+y)^{-\frac{1}{2}} \cdot 1 + \frac{-y}{1-xy}$$

0,5

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x+y}} - \frac{y}{1-xy}.$$

03) $\vec{f}'(t) = (2\,\text{sen}\,t,\ 2t,\ 2\cos t)$

$$P(2,\pi,0). \Leftrightarrow \begin{cases} 2\,\text{sen}\,t = 2 \\ 2t = \pi \\ 2\cos t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{2}$$

2,0

$$\vec{f}''(t) = (2\cos t,\ 2,\ -2\,\text{sen}\,t)$$

O vetor tangente será: $\vec{f}''(\frac{\pi}{2})$, ou seja:

$$\vec{u} = \left(2\cos\frac{\pi}{2},\ 2,\ -2\,\text{sen}\frac{\pi}{2}\right) = (0,\ 2,\ -2)$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{0^2 + (2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

Assim, o vetor tangente unitário em P será

$$w = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot (0,\ 2,\ -2) = \left(0,\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

A reta tangente será a reta passando por $P(2, \pi, 0)$ e vetor diretor $\vec{u} = (0, 2, -2)$:

$$(r): \begin{cases} x = x_p + 0t \\ y = y_p + 2t \\ z = z_p - 2t \end{cases}, \text{ i.e.,}$$

$$(r): \begin{cases} x = 2 \\ y = \pi + 2t \\ z = -2t \end{cases}$$

---

04) $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - 4y^2}$

(a) $\Omega = D(f) = ?$

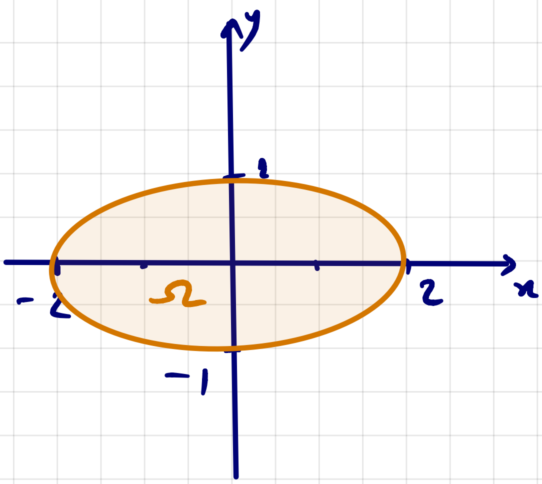
cond. de existência: $4 - x^2 - 4y^2 \geq 0$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4y^2 \leq 4 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} \leq 1.$$

$$D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4 - x^2 - 4y^2 \geq 0\}$$

região interna de uma elipse.

1.0



(b) Elevando $z = \sqrt{4 - x^2 - 4y^2}$ ao quadrado:
$(z \geq 0)$

$$z^2 = 4 - x^2 - 4y^2 \underset{(z\geq 0)}{\Leftrightarrow} x^2 + 4y^2 + z^2 = 4 \underset{(z\geq 0)}{\Leftrightarrow} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{\frac{1}{2}} + \frac{z^2}{4} = 1$$

"CALOTA" superior do elipsoide
(pois $z \geq 0$)

TRAÇOS:

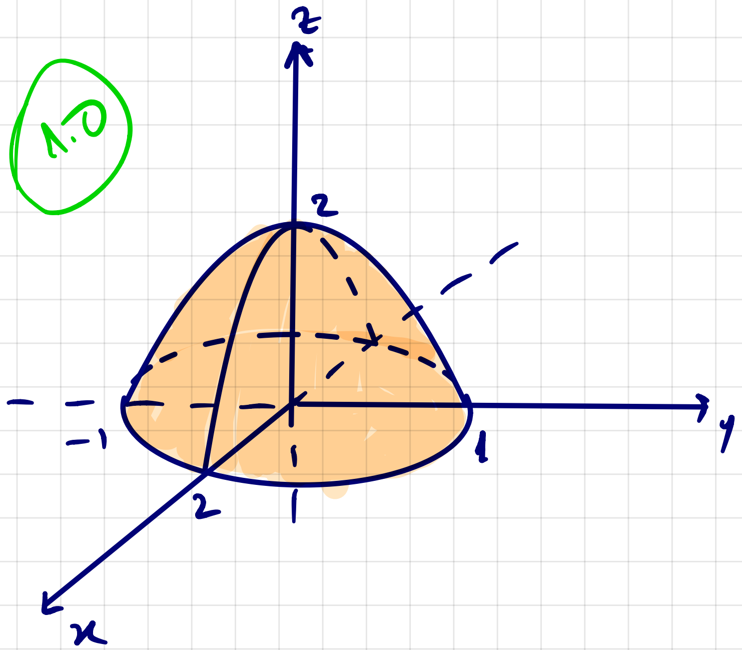
PLANO xy: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$ (elipse)

PLANO xz: $\frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{4} = 1$ (circunf.)

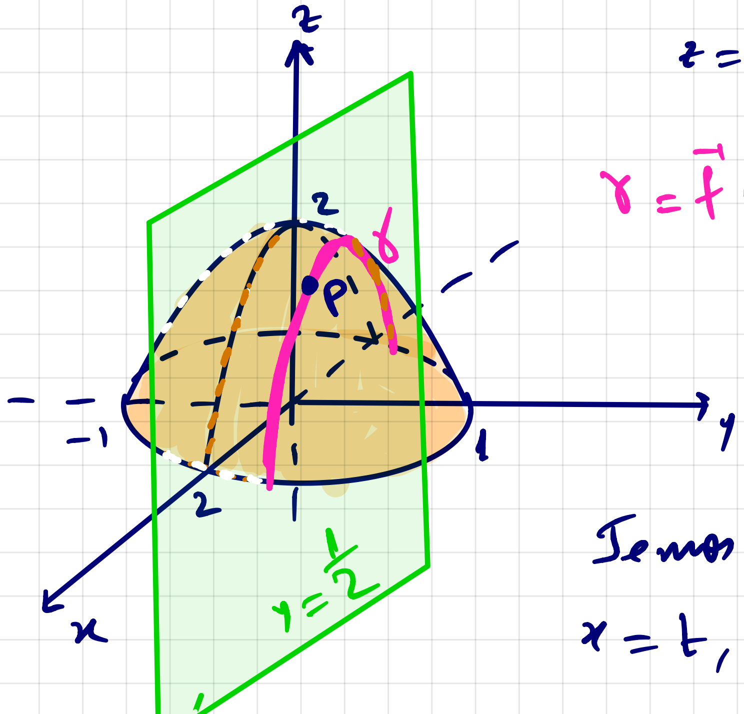
PLANO yz: $\frac{y^2}{1} + \frac{z^2}{4} = 1$ (elipse)

1.0

$Im(f) = [0, 2]$.



(c)



$z = \sqrt{4 - x^2 - 4y^2}$

$\gamma = \vec{f}(t)$

$P(1, \frac{1}{2}, \sqrt{2})$

Temos: $y = \frac{1}{2}$. Fazendo $x = t$, teremos:

$$z = \sqrt{4 - t^2 - 4\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{4 - t^2 - 1} = \sqrt{3 - t^2}$$

Assim, temos:

2º

$$\vec{g}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

$$\Rightarrow \vec{g}(t) = \left(t, \frac{1}{2}, \sqrt{3 - t^2}\right)$$

A derivada será

$$\vec{g}'(t) = \left(1, 0, \frac{1}{\cancel{2}}(3 - t^2)^{-1/2} \cdot (-\cancel{2}t)\right)$$

$$\vec{g}'(t) = \left(1, 0, \frac{-t}{\sqrt{3 - t^2}}\right)$$

O vetor tangente em P será $\vec{g}'(t_0)$, onde

$\vec{g}(t_0) = P = \left(1, \frac{1}{2}, \sqrt{2}\right)$; ou seja, quando

$$\begin{cases} t = 1 \\ \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\ \sqrt{3 - t^2} = \sqrt{2} \iff 3 - t^2 = 2 \iff \underline{t = \pm 1} \end{cases}$$

$t = 1$

Assim,

$$\vec{g}'(1) = \left(1, 0, \frac{-1}{\sqrt{3 - (1)^2}}\right) = \underbrace{\left(1, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}.$$

VETOR TANGENTE AO GRÁFICO DE γ EM P_0.

(d) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)$; onde $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - 4y^2}$

Dem. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{1}{\cancel{2}}(4 - x^2 - 4y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-\cancel{2}x) =$

$= -x \cdot (4 - x^2 - 4y^2)^{-\frac{1}{2}}$

Então:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-x \cdot (4 - x^2 - 4y^2)^{-\frac{1}{2}}\right)$$

1,0

$$= -x \cdot \left(-\frac{1}{\cancel{2}}\right) \cdot (4 - x^2 - 4y^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot (-\overset{4}{\cancel{8}}y)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{-4xy}{\sqrt{(4 - x^2 - 4y^2)^3}}$$

---

05) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{5x^2 y}{x^2 + y^2} ; & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 , & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

AF: f é cont. na origem.

De fato, mostraremos que $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$.

Dado $\varepsilon > 0$, precisamos achar $\delta > 0$ tal que, $\forall x \in \mathbb{R}^2$:

$$0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \Rightarrow |f(x,y) - 0| < \varepsilon.$$

Avaliando $|f(x,y)-0|$:

$$|f(x,y)-0| = |f(x,y)| = \frac{5 \cdot x^2 \cdot |y|}{x^2+y^2} \leq \frac{5\cdot \cancel{(x^2+y^2)}\cdot |y|}{\cancel{x^2+y^2}}$$

$$= 5\cdot|y| = 5\cdot\sqrt{y^2} \leq 5\cdot \underbrace{\sqrt{x^2+y^2}}_{<\delta} < 5\delta := \varepsilon$$

Assim, basta tomar $\delta = \frac{\varepsilon}{5}$.

Portanto, $\exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$; ou seja, f é cont. na origem.

---

06) $\vec{F}(x,y) = \left(\ln(xy-y^2), \sqrt{9-x^2-y^2}\right)$ $\quad \vec{F}: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

(a) $\Omega = D(f) = ?$

condições de existência:

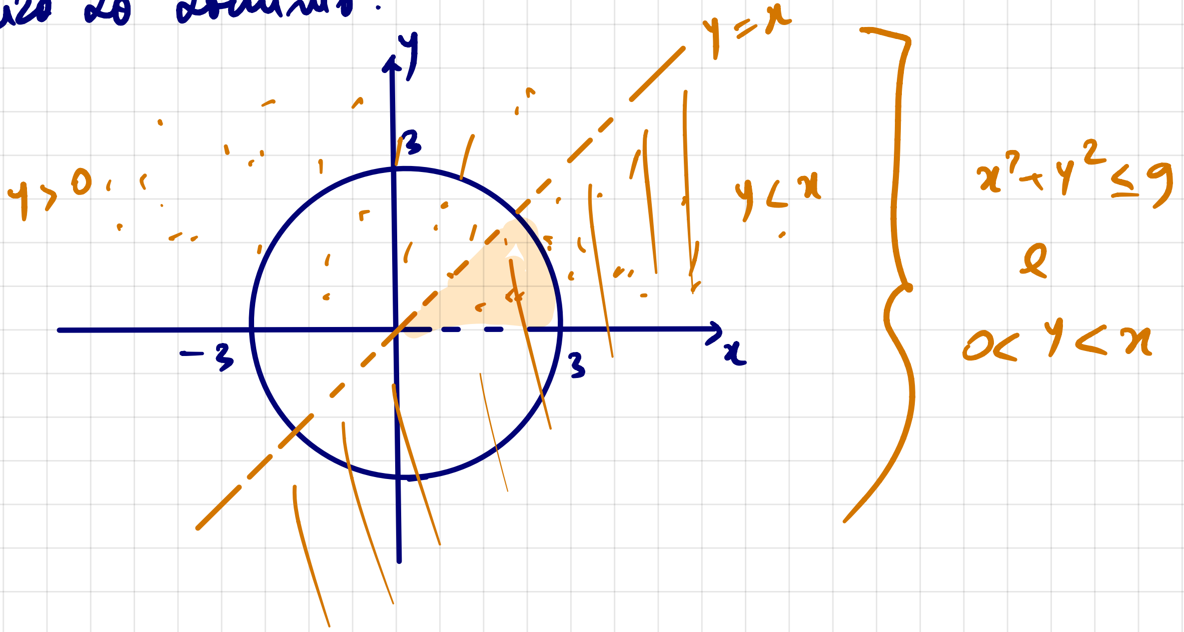
- $xy-y^2>0$
  $y(x-y)>0 \Leftrightarrow \begin{cases} y>0 \text{ e } x-y>0 \\ \text{ou} \\ y<0 \text{ e } x-y<0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y>0 \text{ e } y<x \\ \text{ou} \\ y<0 \text{ e } y>x \end{cases}$$

• $9-x^2-y^2 \geq 0 \iff x^2+y^2 \leq 9$

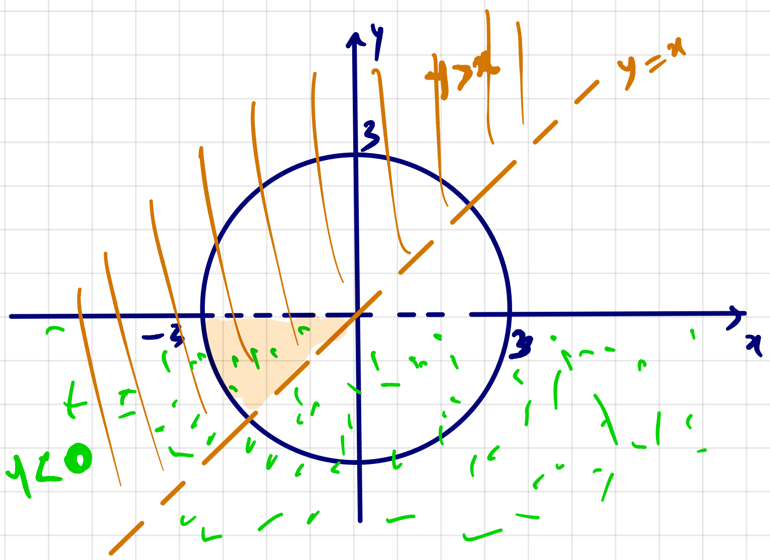
$D(f) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq 9 \text{ e } (0<y<x \text{ ou } y<0 \text{ e } y>x)\}$

gráfico do domínio:

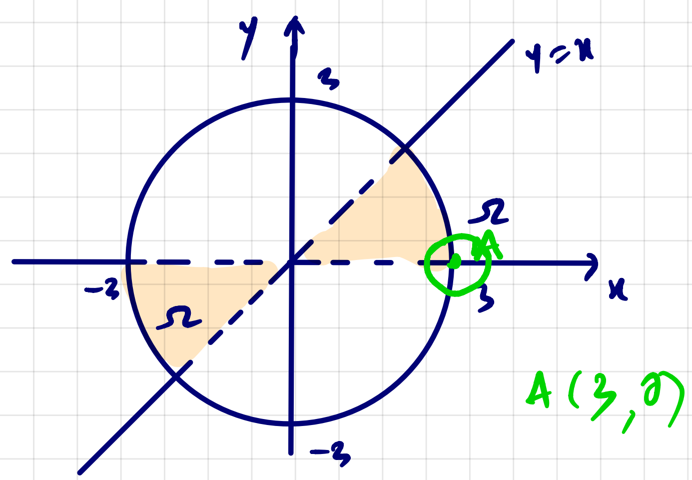


2,0

ou:



conclusão:



O ponto $A(3,0)$ não é ponto interior a Ω, pois $\forall \delta>0$, tem-se que $B_\delta(3,0) \not\subset \Omega$. Será um ponto de fronteira de Ω.

Porém, $A \in \partial\Omega$. E, também, $A \in \overline{X}$, pois podemos tomar, por exemplo, a seq. $(x_n) \subset \Omega$ dada por
$x_n = \left(3 - \frac{1}{n}, 0\right)$, que é tal que

$$x_n \in \Omega, \ \forall n, \ e$$
$$\lim_{n\to\infty} x_n = (3,0) = A.$$

Por fim, Ω não é compacto do $\mathbb{R}^2$, pois não é fechado.

(b) $\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y}$; onde

$$F_1 = \ln(xy - y^2) \quad ; \quad F_2 = (9 - x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}$$

1.0

$$\Rightarrow \frac{\partial F_1}{\partial x} = \frac{y}{xy - y^2} = \frac{1}{x-y} \ ;$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial y} = \frac{1}{\cancel{2}}(9 - x^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}}(-\cancel{2}y) = \frac{-y}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}$$

Assim:
$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{1}{x-y} - \frac{y}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}.$$