

**Universidade Federal de Pelotas**  
**Cursos de Física e Química**  
**Disciplina de Cálculo 3**

**Lista 05 de Exercícios - Diferenciais. Regra da cadeia. Derivada direcional**  
**Prof. Dr. Maurício Zahn**

1. Nos itens a seguir, mostre que  $f$  é diferenciável em todos os pontos do seu domínio. Em seguida, obtenha a matriz Jacobiana  $d_a f$  de cada uma delas.

(a)  $f(x, y) = x^2y - 2xy$                       (b)  $f(x, y) = 2x^2 + 3y^2$   
(c)  $f(x, y) = \frac{x^2}{y}$                               (d)  $f(x, y) = \frac{y}{x}$

2. De cada função vetorial a seguir, obtenha a matriz Jacobiana:

(a)  $f(x, y) = (e^{x^2+y^2}, 2x^2y + 3y^2, \sqrt{x^2 + y^2})$   
(b)  $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2, xyz, \cos xy, x^2 - yz)$

3. Seja  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{3x^2y^2}{x^4 + y^4}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Mostre que  $\frac{\partial}{\partial x}f(0, 0)$  e  $\frac{\partial}{\partial y}f(0, 0)$  existem, mas que  $f$  não é diferenciável na origem.

4. Uma *equação diferencial parcial* - EDP - é uma equação diferencial que envolve derivadas parciais de uma função de várias variáveis reais. A equação diferencial parcial do calor, dada por

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

modela a variação da temperatura à medida que o calor se espalha através de um objeto.

Mostre que  $f(x, t) = \frac{1}{\sqrt{t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}$  satisfaz a equação do calor dada acima.

5. Calcule as diferenciais totais de cada função a seguir:

(a)  $z = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$                               (b)  $z = \ln(xy + y^2)$   
(c)  $z = \arctan \frac{x + y}{1 - xy}$                               (d)  $z = \frac{ye^x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$   
(e)  $z = \arcsin(x\sqrt{1 - y^2} + y\sqrt{1 - x^2})$                               (f)  $z = \frac{x \sin y}{\cos(xy)}$

6. Calcule cada derivada parcial indicada, usando a regra da cadeia.

(a)  $u = \ln xy + y^2$ , onde  $x = e^t$  e  $y = e^{-t}$ . Obter  $\frac{\partial u}{\partial t}$ .  
(b)  $u = x^2yz$ , onde  $x = \frac{r}{s}$ ,  $y = re^s$  e  $z = re^{-s}$ . Obter  $\frac{\partial u}{\partial r}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial s}$  e  $\frac{\partial u}{\partial t}$ .  
(c)  $u = \arcsin(3x + y)$ , onde  $x = r^2e^s$  e  $y = \sin rs$ . Obter  $\frac{\partial u}{\partial r}$  e  $\frac{\partial u}{\partial s}$ .

7. Se  $u = f(x, y)$  é uma função diferenciável de  $x$  e  $y$  com  $x = \rho \cos \theta$  e  $y = \rho \sin \theta$ , mostre que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \rho} \cos \theta - \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{\rho}$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \rho} \sin \theta + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\cos \theta}{\rho}$$

8. Suponha que  $u = f(x, y, z)$  seja diferenciável, onde  $x = \rho \sin \phi \cos \theta$ ,  $y = \rho \sin \phi \sin \theta$  e  $z = \rho \cos \phi$ . Calcule  $\frac{\partial u}{\partial \rho}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial \phi}$  e  $\frac{\partial u}{\partial \theta}$  em termos das derivadas parciais em  $x, y$  e  $z$ .

9. Suponha que  $f(x, y)$  seja uma função de  $x = x(t, s)$  e  $y = y(t, s)$ . Mostre que

$$f_{tt} = f_{xx} \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right)^2 + 2f_{xy} \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) + f_{yy} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 + f_x \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + f_y \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}.$$

10. Usando a definição de derivada direcional, calcule a derivada direcional de cada função abaixo, na direção do vetor unitário  $\vec{u}$  dado. Em seguida, use o teorema visto em aula para calcular a referida derivada.

(a)  $f(x, y) = 2x^2 + 5y^2$ ;  $\vec{u} = \cos \frac{\pi}{4} \vec{i} + \sin \frac{\pi}{4} \vec{j}$

(b)  $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$ ;  $\vec{u} = \frac{3}{5} \vec{i} - \frac{4}{5} \vec{j}$

11. De cada item a seguir, encontre o gradiente de  $f$  em  $P$  e a taxa de variação do valor da função na direção e sentido de  $\vec{u}$  em  $P$ .

(a)  $f(x, y) = e^{2xy}$ ;  $P(-2, 2)$ ;  $\vec{u} = (\cos \frac{\pi}{3}, \sin \frac{\pi}{3})$

(b)  $f(x, y, z) = 2x^3 + xy^2 + xz^2$ ;  $P(1, 1, 1)$ ;  $\vec{u} = \frac{\sqrt{21}}{7} \vec{j} - \frac{2\sqrt{7}}{7} \vec{k}$

12. Em cada item, obtenha a derivada direcional no ponto  $P$ , segundo a direção  $\theta$  indicada.

(a)  $f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $P(2, 1)$ ,  $\theta = 60^\circ$ .

(b)  $f(x, y) = e^x \cos y$ ,  $P(0, 0)$ ,  $\theta = 60^\circ$ .

(c)  $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ ,  $P(1, 1)$ ,  $\theta = 45^\circ$ .

13. Calcule o módulo e a direção do gradiente do potencial  $v(x, y) = \ln \sqrt{\frac{x^2 + (y-2)^2}{x^2 + (y+2)^2}}$  no ponto  $P(2, 0)$ .

14. Seja  $f(x, y) = x^2 - y^2$ . Represente geometricamente  $\nabla f(x_o, y_o)$ , sendo

(a)  $(x_o, y_o) = (1, 1)$ .      (b)  $(x_o, y_o) = (-1, 1)$ .      (c)  $(x_o, y_o) = (-1, -1)$ .

15. Seja  $f(x, y) = \arctan \frac{x}{y}$ . Represente geometricamente  $\nabla f(x_o, y_o)$ , sendo  $(x_o, y_o)$  um ponto da circunferência  $x^2 + y^2 = 1$ .