Universidade Federal de Pelotas
Disciplina de Cálculo 3
Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 04 de Exercícios - Derivadas de funções vetoriais. Derivadas parciais.

1. Calcule a derivada de cada função abaixo:

   (a) $\vec{f}(t) = (\arctan t\sqrt{t}, \ln(1-2t), t^2 - t^3)$

   (b) $\vec{f}(t) = \left(\dfrac{t}{3t-2}, \sqrt{\dfrac{t}{1+2t}}\right)$

2. Em cada item a seguir, encontrar o vetor tangente unitário para a curva dada no instante t apresentado.

   (a) $\vec{f}(t) = (t+1)\vec{i} - t^2\vec{j} + (1-2t)\vec{k}$, em $t = 1$.

   (b) $\vec{f}(t) = e^t \cos t\vec{i} + e^t \sin t\vec{j} + e^t\vec{k}$, em $t = 0$.

3. Mostre que se $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ tem derivada e $g'(t) = 0$ para $a < t < b$, então $g(t)$ é um vetor constante neste intervalo. [Sugestão: aplique o Teorema do Valor Médio a cada função coordenada.]

4. Determinar o vetor tangente ao hodógrafo[1] das seguintes funções vetoriais, nos seguintes pontos indicados:

   (a) $\vec{f}(t) = (t, t^2, t^3)$, $P(-1, 1, 1)$.
   (b) $\vec{f}(t) = (\sin t, \cos t, t)$, $P(1, 0, \frac{\pi}{2})$.
   (c) $\vec{f}(t) = (2t, \ln t, 2)$, $P(2, 0, 2)$.
   (d) $\vec{f}(t) = (e^t, e^{-t}, t^2 + 1)$, $P(1, 1, 1)$.

5. Mostre que o hodógrafo de $\vec{f}(t) = (\frac{1}{2}\operatorname{sen} t, \frac{1}{2}\cos t, \frac{\sqrt{3}}{2})$ está sobre a esfera unitária com centro na origem. Determine um vetor tangente a essa curva, no ponto $P(0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.

6. Seja $\vec{r}(t) = 2\cos\omega t\vec{i} + 4\sin\omega t\vec{j}$, onde ω é uma constante não nula. Mostre que
$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\omega^2\vec{r}.$$

7. Se $\vec{f}$ é uma função vetorial derivável e $h(t) = |\vec{f}(t)|$, mostre que
$$\vec{f}(t) \cdot \vec{f}'(t) = h(t) \cdot h'(t).$$

8. Sejam $f(t)$ uma função escalar duas vezes derivável e $\vec{u}, \vec{v}$ dois vetores constantes. Mostre que se $\vec{g}(t) = \vec{u} + \vec{v}f(t)$, então $\vec{g}'(t) \times \vec{g}''(t) = \vec{0}$.

9. Calcule, de acordo com a definição, as derivadas parciais de cada função a seguir.

   (a) $f(x,y) = 3x^2 - 4xy + 3$
   (b) $f(x,y) = \sqrt{xy - 1}$
   (c) $f(x,y) = \ln(x^2y^2 - 3xy)$

10. Seja $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$. Calcule $f_1(0,0)$ e $f_2(0,0)$.

[1] Chama-se *hodógrafo* o gráfico de uma função vetorial.

11. Dada a função $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, \quad \text{se} & (x,y) = (0,0) \end{cases}$, mostre que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y) = -y$, $\forall y$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,0) = x$, $\forall x$.

12. Calcule as derivadas parciais de primeira ordem de cada função abaixo.

(a) $f(x,y) = e^{x^2-3xy} \tan \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

(b) $f(x,y) = e^{\frac{x}{y}} \ln \dfrac{x^2}{y}$

(c) $f(x,y) = \arctan \sqrt{\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}$

(d) $f(x,y) = \ln \dfrac{x-\sqrt{x^2-y^2}}{x+\sqrt{x^2-y^2}}$

(e) $f(x,y,z) = xyz + xy\cos yz + e^{\sqrt{x^2y-z^3}}$

(f) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

13. Dada a função $w = x^2y + y^2z + z^2x$, prove que

$$\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = (x+y+z)^2.$$

14. Ache a inclinação da reta tangente à curva de interseção da superfície $36x^2 - 9y^2 + 4z + 36 = 0$ com o plano $x = 1$ no ponto $P(1, \sqrt{12}, -3)$. Interprete essa inclinação como uma derivada parcial.

15. Ache a inclinação da reta tangente à curva de interseção da superfície $z = x^2 + y^2$ com o plano $y = 1$, no ponto $P(2,1,5)$. Faça um esboço e interprete essa inclinação como uma derivada parcial.

16. Ache as equações da reta tangente à curva de interseção da superfície $x^2+y^2+z^2 = 9$ com o plano $y = 2$, no ponto $P(1,1,2)$.

17. A lei dos gases ideais para um gás confinado é dada por $PV = kT$, onde P é a presão, expressa em newtons por metro quadrado, V é o volume, exptesso em metros cúbicos, T for a temperatura, em graus, e k uma constante de proporcionalidade. Mostre que

$$\frac{\partial V}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial P} \cdot \frac{\partial P}{\partial V} = -1.$$

18. Definimos o *laplaciano* de uma função $f(x,y)$ por

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Dizemos que uma função f à várias variáveis é *harmônica* se $\Delta f = 0$.
Verifique se as funções a seguir são harmônicas.

(a) $f(x,y) = \ln \sqrt{x^2+y^2}$

(b) $f(x,y) = e^{-2y}\cos 2x$

(c) $f(x,y) = e^{x+y}\cos(x-y)$

(d) $f(x,y) = (x+y)\ln(x+y)$

19. Mostre que a função f dada por $f(x,y) = \dfrac{2x}{x^2+y^2}$ é harmônica.

20. Dada a função $z = x^4 + \sin(x+y) - y\ln x$, mostre que

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2} - 2\frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x} + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = \frac{1}{x^2}.$$

21. Se $z = \sqrt{y + ax} + \arctan(y - ax)$, verifique que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

22. Se $z = x^2 y^3$, mostre que $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.