CÁLCULO 3

26/06/24 - AULA 18

Estudamos em aulas anteriores o conceito de diferenciabilidade em $\mathbb{R}^m$. $f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é diferenciável em $a \in \text{int}(\Omega)$ se, e somente se, existir $T: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ transf. linear tal que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - L(x-a)}{\|x-a\|} = 0 .$$

Neste caso, $L := d_a f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é o diferencial de f no ponto a.

Def.: Seja $f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ função e $a \in \text{int}(\Omega)$. Definimos o incremento de f no ponto a por; sendo $h \in \mathbb{R}^m$ tal que $a + h \in \text{int}(\Omega)$, então

$$\Delta f(a) := f(a+h) - f(a)$$

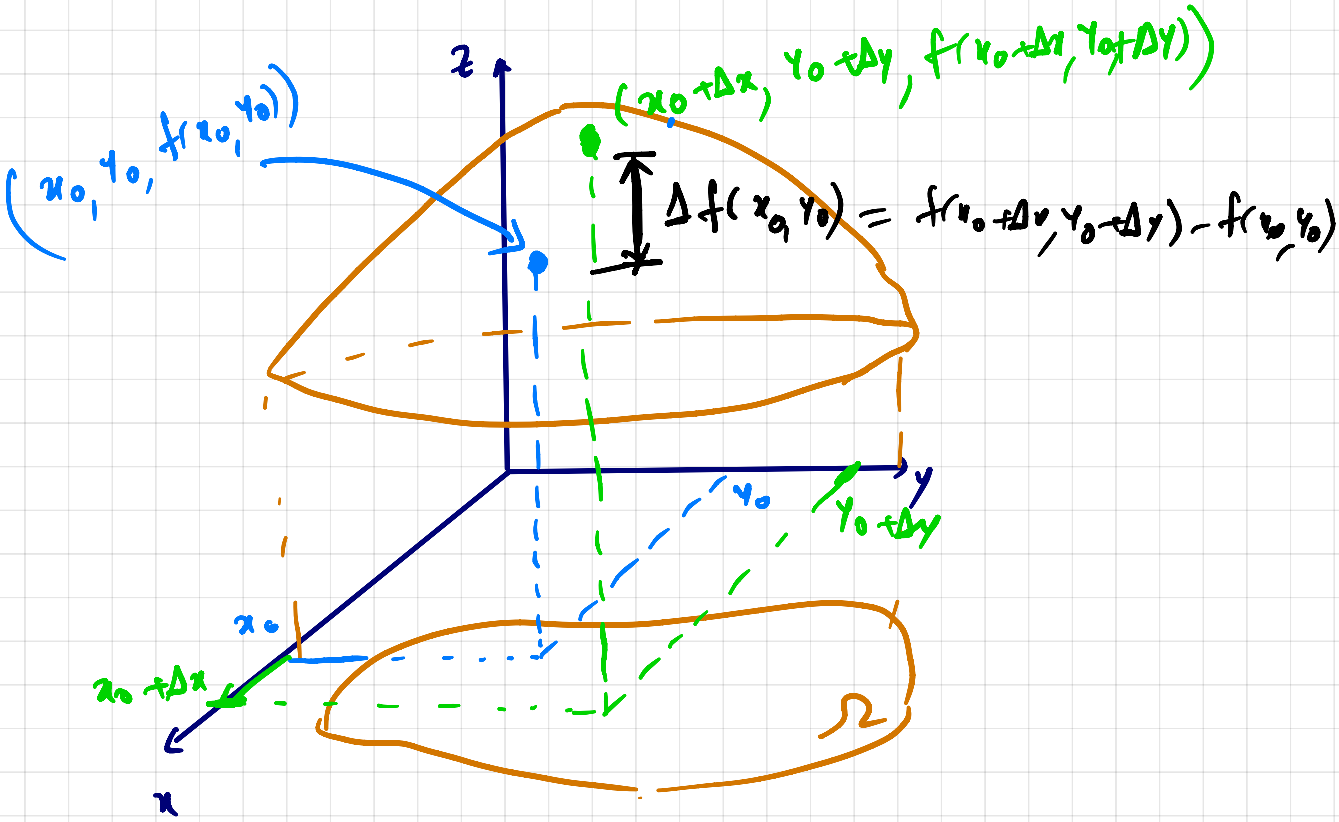
No caso para $f: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ podemos apresentar uma representação geométrica para o incremento $\Delta f(a)$:

Escreva $a = (x_0, y_0) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$. e $h = (\Delta x, \Delta y)$

tal que $a + h = (x_0, y_0) + (\Delta x, \Delta y) = (x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$

Então:

$$\Delta f(a) = \Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y_0) - f(x_0, y_0).$$



Def.: Dizemos que $f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é diferenciável em $a \in int(\Omega)$ se, e só se, o incremento $\Delta f(a)$ puder ser escrito como: sendo $a = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ e $h = (h_1, h_2, \dots, h_m)$, então:

$$\Delta f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\, h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)\, h_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}(a)\, h_3 + \dots +$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial x_m}(a)\, h_m + \varepsilon_1 \cdot h_1 + \varepsilon_2 \cdot h_2 + \dots + \varepsilon_m \cdot h_m,$$

onde $\varepsilon_i \xrightarrow[h \to 0]{} 0$.

Obs.: Esta definição de diferenciabilidade é equivalente àquele estudado anteriormente, que produz a matriz jacobiana. De fato, considerando, para simplificar a notação, $f: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $a \in int(\Omega)$,

$a = (x_0, y_0)$; $h = (\Delta x, \Delta y) \in \text{int}(\Omega)$. Então;

$$f(x) = f(a) + \overbrace{df_a}^{L}(x-a) + \|x-a\| \cdot r(x-a),$$

com $\lim_{x \to a} \frac{r(x-a)}{\|x-a\|} = 0$

Escrevendo $x - a = h \Rightarrow x = a + h$, e disso:

$$f(a+h) = f(a) + df_a(h) + \|h\| \cdot r(h)$$ [conforme aula anterior à prova

$$\Rightarrow \underbrace{f(a+h) - f(a)}_{\Delta f(a)} = df_a(h) + \|h\| \cdot r(h) \qquad (*)$$

No nosso caso de análise: $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

$$df_a = [L]_{1 \times 2} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix}.$$

Além disso ; $h = (\Delta x, \Delta y) = \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix}$;

$$\|h\| = |\Delta x| + |\Delta y| = \Delta x + \Delta y$$

USAMOS A d_1. ASSUMA $\Delta x, \Delta y > 0$.

Dessa forma, teremos; observando $(*)$, que:

$$\Delta f(a) = df_a(h) + \|h\| \cdot r(h)$$
$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} + (\Delta x + \Delta y) \cdot r(\Delta x, \Delta y)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}.\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}.\Delta y + \Delta x . \underbrace{r(\overbrace{\Delta x, \Delta y}^{h})}_{\varepsilon_1} + \Delta y . \underbrace{r(\overbrace{\Delta x, \Delta y}^{h})}_{\varepsilon_2},$$

com $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y) \underset{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)}{\longrightarrow} 0$ e $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y) \underset{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)}{\longrightarrow} 0$

i.e.,

$$\Delta f(a) = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \varepsilon_1 . \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y,$$

com $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \underset{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)}{\longrightarrow} 0$

PROPOSIÇÃO: $f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ (função escalar) é diferenciável em (x_0, y_0) se, e só se, $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ forem todas contínuas em (x_0, y_0).

DEMONSTR.: Exercício (ver. Livro do Leithold, Vol 2).

$\square$

Def.: Seja $f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$. Definimos o diferencial total de f no ponto a, e escrevemos $df(a)$ por $df(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) h_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(a) h_m$

Ou seja, o incremento de f em a fica escrito por:

$$\Delta f(a) = df(a) + \varepsilon_1 h_1 + \varepsilon_2 h_2 + \dots + \varepsilon_m \cdot h_m.$$

Da mesma forma que no cálculo 1, no estudo de diferenciais, temos que

$$\Delta f(a) \simeq df(a)$$

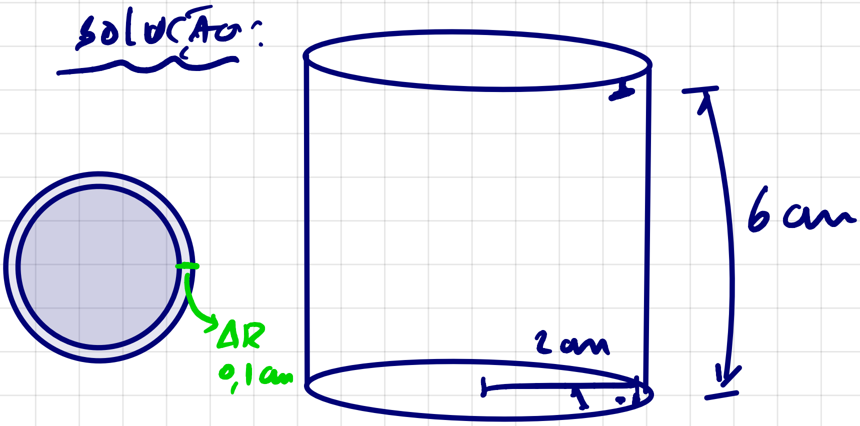
Além disso, $\Delta x = dx$; $\Delta y = dy$, etc...

Assim, o diferencial total de f em a fica:

$$df(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\,dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)\,dx_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}(a)\,dx_3 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(a)\,dx_m.$$

Ex.: Um recipiente de metal, fechado, na forma de um cilindro circular reto, tem uma altura interna de 6 cm, um raio interno de 2 cm, e uma espessura de 0,1 cm. Se o custo do material a ser usado é de R$ 10,00 por cm^3, ache por diferenciais o custo aproximado do metal que será empregado na produção do recipiente.

SOLUÇÃO:



$h = 6\,cm$; $\Delta h = 0{,}2\,cm$.

$R = 2\,cm$; $\Delta R = 0{,}1\,cm$

$$V = A_b \cdot h = \pi R^2 h.$$

$$\Delta V \approx dV = \frac{\partial V}{\partial R} \cdot \Delta R + \frac{\partial V}{\partial h} \cdot \Delta h \quad ;$$

onde $\dfrac{\partial V}{\partial R} = 2\pi R h$; $\dfrac{\partial V}{\partial h} = \pi R^2$

Assim:

$$\Delta V \approx \frac{\partial V}{\partial R} \cdot \Delta R + \frac{\partial V}{\partial h} \cdot \Delta h$$

$$\Delta V \approx 2\pi R h \cdot \Delta R + \pi R^2 \Delta h$$

$$\Delta V \Big| \approx 2\pi \cdot 2 \cdot 6 \cdot 0{,}1 + \pi \cdot (2)^2 \cdot 0{,}2 =$$

$R = 2$; $\Delta R = 0{,}1$
$h = 6$; $\Delta h = 0{,}2$

$$= 2{,}4\pi + 0{,}8\pi = 3{,}2\pi \text{ cm}^3$$

$$\Delta V \approx 3{,}2\pi \text{ cm}^3.$$

O custo C será, aproximadamente,

$$C \approx 10 \cdot \Delta V = 10 \cdot 3{,}2\pi$$

$$\Rightarrow C \approx 32\pi \text{ reais.}$$

REGRA DA CADEIA:

TEOREMA DA REGRA DA CADEIA: Sejam $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ e $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ funções, com f diferenciável em $a \in \mathbb{R}^m$ e g diferenciável em $b = f(a) \in \mathbb{R}^n$.

Então, $g \circ f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ é diferenciável em $a \in \mathbb{R}^m$, com:

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) . f'(a) .$$

Na notação de diferenciais:

$$d_a(g \circ f) = d_{f(a)} g \cdot d_a f .$$

Matricialmente:

$$\underbrace{\left[d_a(g \circ f) \right]}_{k \times m} = \underbrace{\left[d_{f(a)} g \right]}_{k \times n} \cdot \underbrace{\left[d_a f \right]}_{n \times m}$$

A demonstração desse teorema transcede um curso de cálculo. O que será feito será no caso escalar (na próxima aula).