CÁLCULO 3

22/06/24 — AULA 16

AULA DE EXERCÍCIOS.

L3

11. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ função vetorial dada por $g(t) = (t^2, t^3)$. Calcule $\lim_{h\to 0} \dfrac{g(t+h) - g(t)}{h}$.

Solução: Note que o limite dado é, na verdade, $g'(t)$. (pela def.)

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(t+h) - g(t)}{h} =$$

Diferença de vetores.

$$\lim_{h\to 0} \frac{\left((t+h)^2, \overbrace{(t+h)^3}^{(*)}\right) - (t^2, t^3)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(\cancel{t^2} + 2ht + h^2 - \cancel{t^2}, \cancel{t^3} + 3t^2h + 3th^2 + h^3 - \cancel{t^3})}{h}$$

$$= \left(\lim_{h\to 0} \frac{2ht + h^2}{h}, \lim_{h\to 0} \frac{3t^2h + 3th^2 + h^3}{h}\right)$$

$$= \left(\lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}(2t + h)}{\cancel{h}}, \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}(3t^2 + 3th + h^2)}{\cancel{h}}\right)$$

(*) $(t+h)^3 = t^3 + 3 . t^2h + 3t . h^2 + h^3$ ; ou

$(t+h)^3 = (t+h)^2 . (t+h)$

$$= \left( \lim_{h\to 0} (2t+\underbrace{h}_{\to 0}) , \lim_{h \to 0} 3t^2 + \underbrace{3th}_{\to 0} + \underbrace{h^2}_{\to 0} \right)$$

$$= (2t, 3t^2)$$

Ou seja, obtemos:

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(t+h)-g(t)}{h} = (2t, 3t^2)$$

13

13. Nos exercícios a seguir verifique se $f$ é contínua na origem.

(c) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{|x|+|y|}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, \quad \text{se} & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Solução: Para isto, precisamos mostrar que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0.$$

Ou seja, o problema consiste em verificar se

$$\exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$$

Tomando caminhos diferentes, teremos:

- $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ y=0}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ y=0}} \frac{0}{|x|} = 0$

• $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} f(x,y) = \lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} \dfrac{x^2}{|x|+|x|} = \lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} \dfrac{x^2}{2|x|}$

$$= \begin{cases} \lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x,\ x>0}} \dfrac{x^2}{2x} = 0 \\ \lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x,\ x<0}} \dfrac{x^2}{-2x} = 0 \end{cases}$$

Então, suspeitamos que o limite exista e seja zero. Ou seja, provaremos a seguinte afirmação:

AF: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$;

Dado $\varepsilon > 0$, precisamos encontrar $\delta > 0$ $(\delta = \delta(\varepsilon))$, tal que: $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tal que

$0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta.$

$$0 < d((x,y),(0,0)) < \delta,$$

implique em $|f(x,y) - 0| < \varepsilon$.

Analisando $|f(x,y) - 0|$:

$$|f(x,y) - 0| = |f(x,y)| = \left|\frac{xy}{|x|+|y|}\right| = \frac{|xy|}{|x|+|y|} =$$

$$= \frac{|x|\cdot|y|}{|x|+|y|} \le \frac{(\cancel{|x|+|y|})\cdot|y|}{\cancel{|x|+|y|}} = |y| = \sqrt{y^2} \le$$

$|x| \le |x| + |y|$

$$\leq \underbrace{\sqrt{x^2+y^2}}_{<\delta} < \delta = \varepsilon.$$

Ou seja, basta tomar $\underline{\underline{\delta = \varepsilon}}$.

Portanto, vale a AF., ou seja,

$$\exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$$

Então, como $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$, segue que $f$ é contínua na origem.

---

LISTA 04:

17. A lei dos gases ideais para um gás confinado é dada por $PV = kT$, onde $P$ é a presão, expressa em newtons por metro quadrado, $V$ é o volume, exptesso em metros cúbicos, $T$ for a temperatura, em graus, e $k$ uma constante de proporcionalidade. Mostre que

$$\frac{\partial V}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial P} \cdot \frac{\partial P}{\partial V} = -1.$$

SOLUÇÃO:

Temos: $P.V = k.T$. Então: $(k \neq 0)$

$$V = k.T.P^{-1}$$

- $$\frac{\partial V}{\partial T} = k.P^{-1} = \frac{k}{P}. \quad (I)$$

$$PV = kT \implies T = \frac{1}{k} \cdot P \cdot V$$

$$\bullet \quad \frac{\partial T}{\partial P} = \frac{V}{k} \qquad (\text{II})$$

Por fim: $P \cdot V = k \cdot T \implies P = k \cdot T \cdot V^{-1}$

$$\bullet \quad \frac{\partial P}{\partial V} = k \cdot T \cdot (-1) \cdot V^{-2} \cdot 1$$

$$= -\frac{k \cdot T}{V^2} \qquad (\text{III})$$

Portanto temos; de (I), (II) e (III):

$$\frac{\partial V}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial P} \cdot \frac{\partial P}{\partial V} = \frac{\cancel{k}}{P} \cdot \frac{\cancel{V}}{\cancel{k}} \cdot \left(-\frac{k \cdot T}{V^{\cancel{2}}}\right)$$

$$= -\frac{k \cdot T}{\underbrace{P \cdot V}_{= k \cdot T}} = -\frac{\cancel{k \cdot T}}{\cancel{k \cdot T}} = -1.$$

L4:

18. Definimos o *laplaciano* de uma função $f(x, y)$ por

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Dizemos que uma função $f$ à várias variáveis é *harmônica* se $\Delta f = 0$. Verifique se as funções a seguir são harmônicas.

(a) $f(x, y) = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$
(b) $f(x, y) = e^{-2y}\cos 2x$
(c) $f(x, y) = e^{x+y}\cos(x - y)$
(d) $f(x, y) = (x + y)\ln(x + y)$

Solução:

(a) $f(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2} = \ln(x^2+y^2)^{1/2}$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$$

$\log_b a^m = m.\log_b a$

$$\boxed{(\ln r)' = \frac{r'}{r}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}x}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)$$

$$= \frac{(x^2+y^2).1 - x.(2x)}{(x^2+y^2)^2} =$$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{v.u' - u.v'}{v^2}$

$$= \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \left( \frac{\cancel{2}y}{x^2+y^2} \right) = \frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{(x^2+y^2).1 - y.(2y)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Portanto,

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} =$$

$$= \frac{\cancel{y^2} - \cancel{x^2} + \cancel{x^2} - \cancel{y^2}}{(x^2+y^2)^2} = 0$$

$\Rightarrow \Delta f = 0$, ou seja, $f$ é harmônica.

(c) $f(x,y) = e^{x+y} \cdot \cos(x-y)$.

$(u.v)' = u.v' + u'.v$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{x+y} \cdot (-\text{sen}(x-y).1) + e^{x+y}.1.\cos(x-y)$$

$$= -e^{x+y} \cdot \text{sen}(x-y) + e^{x+y} \cdot \cos(x-y)$$

$$= e^{x+y} \cdot \left(\cos(x-y) - \text{sen}(x-y)\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{x+y}\cdot\left(\cos(x-y) - \operatorname{sen}(x-y)\right)\right)$$

$$= e^{x+y}\cdot\left(-\operatorname{sen}(x-y)\cdot 1 - \cos(x-y)\cdot 1\right) +$$

$$+ e^{x+y}\cdot 1\cdot\left(\cos(x-y) - \operatorname{sen}(x-y)\right)$$

$$= e^{x+y}\cdot\left(-\operatorname{sen}(x-y) - \cancel{\cos(x-y)} + \cancel{\cos(x-y)} - \operatorname{sen}(x-y)\right)$$

$$= -2\cdot e^{x+y}\cdot \operatorname{sen}(x-y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{x+y}\cdot\left(-\operatorname{sen}(x-y)\cdot(-1)\right) + e^{x+y}\cdot 1\cdot\cos(x-y)$$

$$= e^{x+y}\cdot\left(\cos(x-y) + \operatorname{sen}(x-y)\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{x+y}\cdot\left(\cos(x-y) + \operatorname{sen}(x-y)\right)\right) =$$

$$= e^{x+y}\cdot\left(-\operatorname{sen}(x-y)\cdot(-1) + \cos(x-y)\cdot(-1)\right) +$$

$$e^{x+y}\cdot 1\cdot\left(\cos(x-y) + \operatorname{sen}(x-y)\right)$$

$$= e^{x+y}\cdot\left(\operatorname{sen}(x-y) - \cancel{\cos(x-y)} + \cancel{\cos(x-y)} + \operatorname{sen}(x-y)\right)$$

$$= 2 \cdot e^{x+y} \cdot \operatorname{sen}(x-y)$$

Portanto, teremos:

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2e^{x+y} \cancel{\operatorname{sen}(x-y)} + 2e^{x+y} \cdot \cancel{\operatorname{sen}(x-y)}$$

$= 0$, ou seja, $f$ é harmônica!

L4:

21. Se $z = \sqrt{y + ax} + \arctan(y - ax)$, verifique que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Solução:

$$z = (y+ax)^{\frac{1}{2}} \cdot \operatorname{arctan}(y-ax)$$

lembrar:

$$(u^k)' = k \cdot u^{k-1} \cdot u'$$

$$(\arctan u)' = \frac{u'}{1+u^2}$$

$$(u \cdot v)' = u \cdot v' + u' \cdot v$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (y+ax)^{\frac{1}{2}} \frac{-a}{1+(y-ax)^2}$$

$$= -a \cdot \frac{(y+ax)^{\frac{1}{2}}}{1+(y-ax)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-a(y+ax)^{\frac{1}{2}}}{1+(y-ax)^2}\right)$$

$$= \frac{\left(1+(y-ax)^2\right).\left(-a.\frac{1}{2}.(y+ax)^{-\frac{1}{2}}.a\right) - a.(y+ax)^{\frac{1}{2}}.\left(2.(y-ax)^{1}(-a)\right)}{\left[1+(y-ax)^2\right]^2}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{v.u' - u.v'}{v^2}$$

$$= \frac{\left(1+(y-ax)^2\right)\frac{-a^2}{\sqrt{y+ax}} + 2a^2(y+ax)\sqrt{y+ax}}{\left[1+(y-ax)^2\right]^2}$$

$$= \frac{\dfrac{-a^2 - a^2(y-ax)^2 + 2a^2(y+ax).(y+ax)}{\sqrt{y+ax}}}{\left[1+(y-ax)^2\right]^2}$$

$$= \frac{-a^2 - a^2(y-ax)^2 + 2a^2(y+ax)^2}{\sqrt{y+ax}\,.\left[1+(y-ax)^2\right]^2}$$

(...) (etc.)

--- cálculos longos ---

L4:

4. Determinar o vetor tangente ao hodógrafo[1] das seguintes funções vetoriais, nos seguintes pontos indicados:

(a) $\vec{f}(t) = (t, t^2, t^3)$, $P(-1, 1, 1)$. (b) $\vec{f}(t) = (\sin t, \cos t, t)$, $P(1, 0, \frac{\pi}{2})$.

o vetor tangente em $P(1, 0, \frac{\pi}{2})$; será

$$\vec{f}\,'(t_0)$$ ; onde

$t_0$ é o valor real que produz o ponto P no gráfico de f. Ou seja:

$$\vec{f}(t) = (\text{sen}\,t, \cos t; t);$$

$$\left.\begin{aligned} x &= \text{sen}\,t = 1. \\ y &= \cos t = 0 \\ z &= t = \frac{\pi}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$$

Ou seja, queremos calcular $\vec{f}\,'(\frac{\pi}{2})$.

Assim:

$$f'(t) = (\cos t, -\text{sen}\,t, 1)$$

$$\Rightarrow f'(\tfrac{\pi}{2}) = (\cos\tfrac{\pi}{2}, -\text{sen}\tfrac{\pi}{2}, 1) = \underbrace{(0, -1, 1)}_{\substack{\shortparallel \\ \text{VETOR TANGENTE AO} \\ \text{GRÁFICO DE } \vec{f} \\ \text{NO PONTO } P.}}$$

CURIOSIDADE:

$$\vec{N} = \vec{PQ} = Q - P$$

$$P + \vec{N} = Q.$$

$$\left(1, 0, \frac{\pi}{2}\right) + (0, -1, 1) = \left(1, -1, 1 + \frac{\pi}{2}\right)$$