CÁLCULO 3

21/06/24 – AULA 15

AULA DE EXERCÍCIOS (SOBRE A LISTA 03)

obs: $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3) =$
$= u_1 \vec{i} + u_2 \vec{j} + u_3 \vec{k}$.

10. Calcule o limite de cada função vetorial a seguir:

(a) $\lim_{t\to 1} \left(\frac{\sqrt{t}-1}{1-t^2}\vec{i} + \ln(t)\vec{j} + \frac{1-\cos t}{2t}\vec{k} \right)$ (b) $\lim_{t\to 0} \left(\frac{2^t-1}{t}, \frac{\sin 3t}{2t}, \frac{t^2-t}{\sqrt{t+1}-1} \right)$

Vimos na teoria que, dado

$$\vec{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t))$$

função vetorial, então,

$$\lim_{t\to a} \vec{f}(t) = \left(\lim_{t\to a} f_1(t), \lim_{t\to a} f_2(t), \dots, \lim_{t\to a} f_n(t) \right)$$

Assim:

(a) • $\lim_{t\to 1} \frac{\sqrt{t}-1}{1-t^2} \times \frac{\sqrt{t}+1}{\sqrt{t}+1} = \lim_{t\to 1} \frac{t-1}{(1-t).(1+t)(\sqrt{t}+1)}$

$$= \lim_{t\to 1} \frac{-\cancel{(1-t)}}{\cancel{(1-t)}.(1+t).(\sqrt{t}+1)} = \frac{-1}{(1+1).(\sqrt{1}+1)} = \underline{\underline{-\frac{1}{4}}}$$

• $\lim_{t\to 1} \ln t = \ln 1 = \underline{\underline{0}}$

- $\lim_{t\to 1} \frac{1-\cos t}{2t} = \frac{1-\cos 1}{2}$ //

Portanto, obtemos

$$\lim_{t\to 1} \vec{f}'(t) = \left(-\frac{1}{4}, 0, \frac{1-\cos 1}{2}\right).$$

(b) $\lim_{t\to 0}\left(\frac{2^t-1}{t}; \frac{\operatorname{sen} 3t}{2t}; \frac{t^2-t}{\sqrt{t+1}-1}\right)$

- $\lim_{t\to 0} \frac{2^t-1}{t} \overset{\text{L'HOPITAL}}{=}$

$= \lim_{t\to 0} \frac{2^t \cdot \ln 2 - 0}{1} = 2^0 \cdot \ln 2$

$= \ln 2$

$$\boxed{\lim_{t\to 0} \frac{a^t-1}{t} = \ln a}$$

ou usar a regra de L'HOPITAL:

$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$

$\Downarrow$

$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ldots$

segue até sumir a indeterm.

$(a^r)' = a^r \cdot \ln a \cdot r'$

- $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\text{sen}\,3t}{2t} \underset{\text{L'HOPITAL}}{=} \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\cos 3t \cdot 3}{2} =$

LIMITE TRIGONOMÉTRICO FUNDAMENTAL:

$$\boxed{\lim_{u\to 0} \frac{\text{sen}\, u}{u} = 1}$$

ou usar L'HOPITAL.

$$= \frac{\underbrace{\cos(3.0)}_{=1} \cdot 3}{2} = \frac{3}{2}$$

- $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{t^2 - t}{\sqrt{t+1} - 1} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{t.(t-1)}{\sqrt{t+1} - 1} \times \dfrac{\sqrt{t+1} + 1}{\sqrt{t+1} + 1}$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{t(t-1).(\sqrt{t+1} + 1)}{t + \cancel{1} - \cancel{1}} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\cancel{t}.(t-1).(\sqrt{t+1} + 1)}{\cancel{t}} = \frac{-1.(2)}{1} = -2$$

Portanto:

$$\lim_{t\to 0} \vec{f}(t) = \left(\ln 2, \frac{3}{2}, -2\right).$$

6. Mostre que $\lim_{(x,y)\to(0,0,)} \dfrac{\operatorname{sen} xy}{\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y} = 1$. Repare que a função só é definida para $x \neq 0$ e $y \neq 0$.

Solução: Note que devemos ter $x \neq 0$ e $y \neq 0$.

A ideia consiste em usar o limite trigonométrico fundamental:

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\operatorname{sen} \theta}{\theta} = 1.$$

Disso:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen} xy}{\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} y} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\overbrace{\dfrac{\operatorname{sen} xy}{xy}}^{\to 1}}{\underbrace{\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\dfrac{\operatorname{sen} y}{y}}_{\to 1}} = 1.$$

8. Sabendo que $2|xy| - \dfrac{x^2y^2}{6} < 4 - 4\cos\sqrt{|xy|} < 2|xy|$, calcule $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{4 - 4\cos\sqrt{|xy|}}{|xy|}$.

Solução: Pelos dados do problema, usaremos o T. do Sanduíche. (aula 7)

Assim:

$$2|xy| - \frac{x^2y^2}{6} < 4 - 4\cos\sqrt{|xy|} < 2|xy| \qquad \div\ \underbrace{|xy| \neq 0}_{>0}$$

$$2-\frac{x^2y^2}{6|xy|} < \frac{4-4\cos\sqrt{|xy|}}{|xy|} < 2$$

$$\Rightarrow \quad 2-\frac{x^2y^2}{6|x|\cdot|y|} < \frac{4-4\cos\sqrt{|xy|}}{|xy|} < 2$$

$$|x|=\sqrt{x^2} \quad ; \quad |y|=\sqrt{y^2}$$

$$\Rightarrow \quad 2-\frac{x^2y^2}{6\sqrt{x^2\cdot y^2}} < \frac{4-4\cos\sqrt{|xy|}}{|xy|} < 2$$

$$\Rightarrow \quad 2-\frac{1}{6}\cdot\sqrt{\frac{x^4y^4}{\cancel{x^2}\,\cancel{y^2}}} < \frac{4-4\cos\sqrt{|xy|}}{|xy|} < 2$$

$$\underbrace{2-\frac{1}{6}\sqrt{x^2y^2}}_{\xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 2} < \frac{4-4\cos\sqrt{|xy|}}{|xy|} < \underbrace{2}_{\xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 2}$$

$$\Rightarrow \text{T. Sandwiche:} \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4-4\cos\sqrt{|xy|}}{|xy|} = 2$$

14. Determine os pontos onde $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x+y)}{x+y}, & \text{se} \quad x+y \neq 0 \\ 1, & \text{se} \quad x+y = 0 \end{cases}$ é contínua.

Solução: Esta função é uma composição de funções contínuas. O conjunto onde ela pode perder a continuidade seria no conjunto onde a sentença que define f muda. Ou seja, precisamos verificar no conjunto

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y = 0\}$$

Note que:

$$\lim_{x+y \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+y)}{x+y} = 1 \quad (\text{Limite fundamental})$$

$$\|$$

$$\lim_{(x,y)\to(a,-a)} \frac{\operatorname{sen}(x+y)}{x+y} = 1, \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

$$\|$$

$$\lim_{(x,y)\in A} \frac{\operatorname{sen}(x+y)}{x+y} = 1.$$

E $f(a,-a) = 1$, pois $a + (-a) = 0$,

pela 2ª sentença da def. de f.

Ou seja, $\forall (x,y) \in A$, $f(x,y) = 1$.

Assim, obtemos que

$$\lim_{(x,y)\in A} f(x,y) = 1 = f(x,y), \quad \forall (x,y) \in A.$$

Ou seja, f é cont. em todo o $\mathbb{R}^2$, pois fora do conj. A, $\dfrac{\operatorname{sen}(x+y)}{x+y}$ é contínua, pois será composição de funções contínuas.

CORRIGIR NA LISTA.

15. Seja A o conjunto dado por

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq \ln x, 1 \leq x \leq 2\}$$

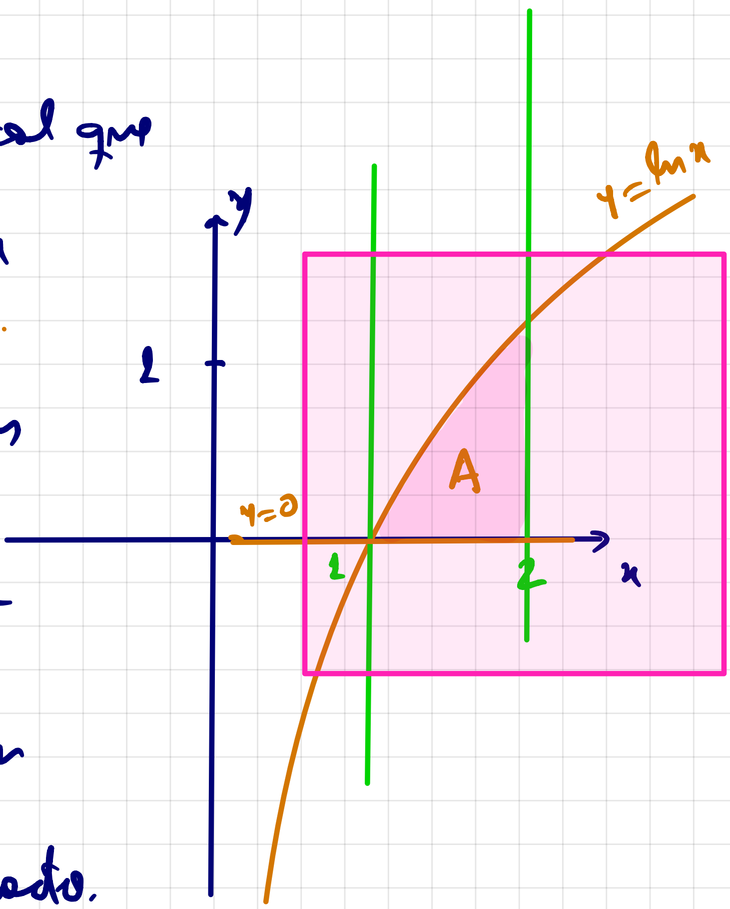
(a) Desenhe o conjunto A. Este conjunto é um compacto do $\mathbb{R}^2$? Justifique.

(b) Mostre que a função $f(x, y) = x^2 + (y-1)^2$ assume um valor máximo e um valor mínimo em A.

Solução:

(a) O conj. A é tal que

$1 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq \ln x$



A é limitado pois podemos deixá-lo inteiramente numa BOLA ou retângulo de dimensões finitas.

A é fechado pois contém seus pontos de fronteira.

Portanto, A é compacto.

(b) De fato, $f(x,y) = x^2 + (y-1)^2$ é contínua (polinômio de 2 variáveis). Então, estamos nas hipóteses do T. de Weierstrass: ou seja, temos f contínua definida em um compacto A. Logo, f possuirá um valor máximo e um valor mínimo em A.

[veja a aula 08]

13. Nos exercícios a seguir verifique se f é contínua na origem.

(a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x+y}{x^2+y^2}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, \ \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4+y^2}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, \ \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(c) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{|x|+|y|}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, \ \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(d) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2y^2-3xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, \ \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(d) Para isto, precisamos verificar se

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0.$$

¿ $\exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$? Verifiquemos por caminhos diferentes.

- $$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} \frac{0}{\sqrt{x^2}} = 0$$

- $$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} \frac{2x^2-3x^2}{\sqrt{2x^2}} =$$

$$= \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} \frac{-x^2}{\sqrt{2}.|x|} = \begin{cases} \lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x,\ x>0}} \dfrac{-x^{\cancel{2}}}{\sqrt{2}\,\cancel{x}} = 0 \\ \lim\limits_{(x,y)\to(0,0),\ x<0} \dfrac{-x^{\cancel{2}}}{\sqrt{2}.(-\cancel{x})} = 0 \end{cases}$$

Isto sugere que o limite possa existir.

Dado $\varepsilon>0$. Precisamos achar $\delta>0$ $(\delta=\delta(\varepsilon))$ tal que;

$$\forall (x,y) \in 0<B_\delta(0,0)<\delta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f(x,y)-0|<\varepsilon.$$

$$0<B_\delta(0,0) = \sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2} = \sqrt{x^2+y^2} < \delta$$

bola euclidiana

Analisando

$$|f(x,y)-0| = |f(x,y)| = \left|\frac{2y^2-3xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| =$$

$$\frac{|y|.|2y-3x|}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Como (*) $\begin{cases} |x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2+y^2} & \text{e} \\ |y| = \sqrt{y^2} \leq \sqrt{x^2+y^2} & ; \end{cases}$ então:

$$|f(x,y) - 0| = \frac{|y| \cdot |2y - 3x|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq$$

$$\leq \frac{|y| \cdot (2 \cdot |y| + 3 \cdot |x|)}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq$$

(*)

desig. triang.:

$|a+b| \leq |a| + |b|$

$|a-b| \leq |a| + |-b|$

$= |a| + |b|$

$$\leq \frac{\cancel{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot (2 \cdot \sqrt{x^2+y^2} + 3\sqrt{x^2+y^2})}{\cancel{\sqrt{x^2+y^2}}} =$$

$$= 5 \underbrace{\sqrt{x^2+y^2}}_{< \delta} < 5\delta := \varepsilon$$

Ou seja, basta tomar $\delta = \frac{\varepsilon}{5}$;

e então $\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$

Portanto, f é cont. na origem.